Institut für Theoretische Physik, Universität Zürich

Lösung für Blatt 10 „Elektrodynamik“

Prof. Dr. T. Gehrmann | Blatt 10 – FS 2013

Aufgabe 1 Homogene Maxwellgleichungen

a) Wir zeigen $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$, $\forall \nu \in \{0,1,2,3\} \Leftrightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$, $\vec{\nabla}\times\vec{E} + \partial_t\vec{B} = \vec{0}$, wobei $\tilde{F}^{\mu\nu} := \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$.

- $\nu = i$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}\epsilon^{\mu i\alpha\beta}\partial_\mu F_{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{2}(\epsilon^{0i\alpha\beta}\partial_0 F_{\alpha\beta} + \epsilon^{ji\alpha\beta}\partial_j F_{\alpha\beta}) \\ &= \frac{1}{2}(\epsilon^{0ilm}\partial_0 F_{lm} + \epsilon^{ji0m}\partial_j F_{0m} + \epsilon^{jil0}\partial_j F_{l0}) \\ &= \frac{1}{2}(\epsilon^{ilm}\partial_0 F_{lm} - \epsilon^{ijm}\partial_j F_{0m} + \epsilon^{ijl}\partial_j F_{l0}) \\ &= -\frac{1}{c}\partial_t B^i - \frac{1}{c}\epsilon^{ijm}\partial_j E_m \\ &= -\frac{1}{c}(\partial_t B^i + (\vec{\nabla}\times\vec{E})^i) \end{aligned} \tag{1}$$

- $\nu = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}\epsilon^{\mu 0\alpha\beta}\partial_\mu F_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\partial_i F_{jk} \\ &= \partial_i B^i = (\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) \end{aligned} \tag{2}$$

b) Wir zeigen $\partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} = 0$, $\forall \alpha,\beta,\gamma \in \{0,1,2,3\} \Leftrightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$, $\vec{\nabla}\times\vec{E} + \partial_t\vec{B} = \vec{0}$.
Es gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{c}(\vec{\nabla}\times\vec{E})^1 + \frac{1}{c}\partial_t B^1 \\ &= \frac{1}{c}(\partial_2 E^3 - \partial_3 E^2) + \partial_0 B^1 \\ &= \partial_2 F^{30} + \partial_3 F^{02} - \partial_0 F^{23} \\ &= -(\partial^2 F^{30} + \partial^3 F^{02} + \partial^0 F^{23}). \end{aligned} \tag{3}$$

Analog für zweite und dritte Komponent:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{c}(\vec{\nabla}\times\vec{E})^2 + \frac{1}{c}\partial_t B^2 \\ &= -(\partial^3 F^{10} + \partial^1 F^{03} + \partial^0 F^{31}), \\ 0 &= \frac{1}{c}(\vec{\nabla}\times\vec{E})^3 + \frac{1}{c}\partial_t B^3 \\ &= -(\partial^1 F^{20} + \partial^2 F^{01} + \partial^0 F^{12}). \end{aligned} \tag{4}$$

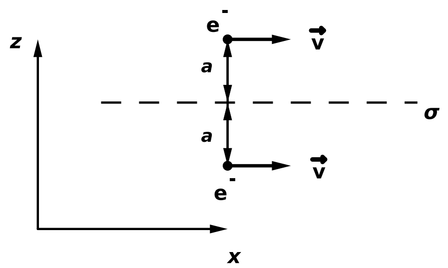
Es gilt auch

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \partial_i B^i \\ &= \partial_1 F^{32} + \partial_2 F^{13} + \partial_3 F^{21} \\ &= \partial^1 F^{23} + \partial^2 F^{31} + \partial^3 F^{12}. \end{aligned} \tag{5}$$

Mit (3), (4), (5) und $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ folgt, dass

$$\begin{aligned} &\partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} = 0, \quad \forall\, \alpha, \beta, \gamma. \\ &(\text{Bem:} \quad \alpha = \beta \to 0) \end{aligned} \tag{6}$$

Aufgabe 2 Lorentztransformation der e.m. Felder



i) Die elektrische Feld der Ebene in Laborsystem ist $\vec{E} = E\vec{e}_z$, wobei

$$E = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} & \text{für } z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} & \text{für } z < 0 \end{cases}. \tag{7}$$

Das e.m. Tensor ist also

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{c}E \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{c}E & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Die Lorentztransformation bis Ruhesystem der Elektronen ist

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Es folgt, dass das e.m. Tensor im Ruhesystem der Elektronen

$$(F'^{\mu\nu}) = \Lambda(F^{\mu\nu})\Lambda^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma}{c}E \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\beta\gamma}{c}E \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma}{c}E & -\frac{\beta\gamma}{c}E & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

ist und die Kraft, die wirkt auf oberstem Elektron, ist

$$\vec{K} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{(2a)^2} - e\gamma\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \right) \vec{e}_z = 0. \tag{11}$$

Daher ist die Ladungsdichte der Platte

$$\sigma = \frac{e}{8\pi\gamma a^2}. \tag{12}$$

ii) Es gilt $\mathcal{E} = \gamma m_e c^2$. Es folgt

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = 5 \cdot 10^5. \tag{13}$$

iii) Je grosser die Strahlenergie, desto geringer ist der Strahlaufweichung durch Abstossung der Elektrische Feld.