Institut für Theoretische Physik, Universität Zürich

Lösung für Blatt 11 „Elektrodynamik“

Prof. Dr. T. Gehrmann Blatt 11 – FS 2013

Aufgabe 1 Fourier-Transformation

i) Da die Fourier-Transformation linear ist, lautet das Ergebnis $a\,\hat{f}(\vec{k}) + b\,\hat{g}(\vec{k})$.

ii)

$$\begin{aligned}
\widehat{(\vec{\nabla} f)}(\vec{k}) &= \int \mathrm{d}^3x \left(\vec{\nabla} f(\vec{x})\right) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \\
&= \int \mathrm{d}^3x\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \vec{\nabla} \int \frac{\mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3} \hat{f}(\vec{k}') e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x}} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3} i\vec{k}' \int \mathrm{d}^3x\, e^{i(\vec{k}'-\vec{k})\cdot\vec{x}} \hat{f}(\vec{k}') \\
&= \int \mathrm{d}^3k' i\vec{k}' \delta(\vec{k}'-\vec{k}) \hat{f}(\vec{k}') \\
&= i\vec{k}\hat{f}(\vec{k}) \ .
\end{aligned}$$

Alternativ kann man auch partielle Integration benutzen.

iii)

$$\begin{aligned}
\widehat{(fg)}(\vec{k}) &= \int \mathrm{d}^3x\, f(\vec{x}) g(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \\
&= \int \mathrm{d}^3x \left(\int \frac{\mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3} \hat{f}(\vec{k}') e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x}} \right) g(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3} \hat{f}(\vec{k}') \int \mathrm{d}^3x\, g(\vec{x}) e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3} \hat{f}(\vec{k}') \hat{g}(\vec{k}-\vec{k}') \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} (\hat{f} * \hat{g})(\vec{k}) \ ,
\end{aligned}$$

wobei wir mit $*$ die Faltung zweier Funktionen bezeichnen.

iv) Die komplex Konjugierte f^* von f transformiert sich gemäss

$$\widehat{(f^*)}(\vec{k}) = \int \mathrm{d}^3x f^*(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \left(\int \mathrm{d}^3x f(\vec{x}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right)^* = \left(\hat{f}(-\vec{k}) \right)^* \ .$$

Deswegen lautet die Fourier-Transformierte der Gleichung $f(\vec{x}) = f^*(\vec{x})$

$$\hat{f}(\vec{k}) = \hat{f}^*(-\vec{k}) \ .$$

v)

$$\hat{\delta}(\vec{k}) = \int \mathrm{d}^3x\, \delta(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} = e^{-i\vec{k}\cdot\vec{0}} = 1 \ .$$

Aufgabe 2 Elliptisch polarisierte Wellen

- Betrachte $\vec{k} = k\vec{e}_z$. Das E-Feld ist gegeben durch

$$\vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y \tag{1}$$

mit den Komponenten

$$\begin{aligned} E_x &= |E_{0x}| \cos(\phi), \\ E_y &= |E_{0y}| \cos(\phi + \delta), \end{aligned} \tag{2}$$

wobei wir $\phi = kz - \omega t + \varphi$ gesetzt haben. Es genügt nun, eine Gleichung der Form $aE_x^2 + 2bE_xE_y + cE_y^2 = 1$ zu finden, wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$ konstant. Falls $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ positiv definit ist, handelt es sich um eine Ellipse.

In der Tat können wir in den Gleichungen (2) das Additionstheorem

$$\cos(\phi + \delta) = \cos(\phi)\cos(\delta) - \sin(\phi)\sin(\delta) = \cos(\phi)\cos(\delta) \pm \sqrt{1 - \cos^2(\phi)}\,\sin(\delta)$$

benutzen und $\cos(\phi)$ eliminieren. Wir erhalten so

$$\frac{E_y}{|E_{0y}|} - \frac{E_x}{|E_{0x}|}\cos(\delta) = \pm\sqrt{1 - \frac{E_x^2}{|E_{0x}|^2}}\,\sin(\delta)\,. \tag{3}$$

Wir quadrieren diese Gleichung und erhalten

$$\frac{E_x^2}{|E_{0x}|^2} - 2\cos(\delta)\frac{E_xE_y}{|E_{0x}||E_{0y}|} + \frac{E_y^2}{|E_{0y}|^2} = \sin^2(\delta)\,, \tag{4}$$

was für $\sin(\delta) \neq 0$ die gewünschte Form hat. Insbesondere hat die Matrix

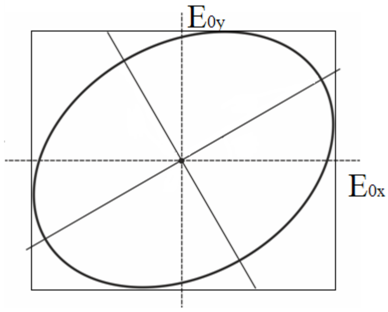
$$\frac{1}{\sin^2(\delta)} \begin{pmatrix} \frac{1}{|E_{0x}|^2} & -\frac{\cos(\delta)}{|E_{0x}||E_{0y}|} \\ -\frac{\cos(\delta)}{|E_{0x}||E_{0y}|} & \frac{1}{|E_{0y}|^2} \end{pmatrix}$$

positive Spur und Determinante und ist somit positiv definit. Die Ellipse ist für generisches δ verdreht (siehe Zeichnung).

Im Spezialfall $\sin(\delta) = 0$ handelt es sich um eine linear polarisierte Welle, da das Verhältnis von E_x und E_y stets konstant ist.

- Betrachten wir zunächst das komplexe E-Feld $\vec{\mathsf{E}} = \mathsf{E}_x\vec{e}_x + \mathsf{E}_y\vec{e}_y$ mit Komponenten

$$\begin{aligned} \mathsf{E}_x &= E_{0x} e^{i(kz - \omega t)}, \\ \mathsf{E}_y &= E_{0y} e^{i(kz - \omega t)}, \end{aligned} \tag{5}$$



wobei

$$E_{0x} = |E_{0x}|e^{i\varphi}, \quad E_{0y} = |E_{0y}|e^{i(\varphi+\delta)}.$$

Wir verwenden die Vektoren

$$\vec{e}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x \pm i\vec{e}_y). \tag{6}$$

Damit bekommen wir

$$E_{0x}\vec{e}_x + E_{0y}\vec{e}_y = \frac{1}{\sqrt{2}}[(E_{0x} - iE_{0y})\vec{e}_+ + (E_{0x} + iE_{0y})\vec{e}_-]. \tag{7}$$

Die komplexen Grössen in Klammern können wie folgt umgeschrieben werden:

$$E_{0x} \pm iE_{0y} = E_{\pm}e^{i\gamma_{\pm}} \tag{8}$$

mit reellen $E_{\pm}$. Die ebene Welle ist dann

$$\vec{\mathsf{E}} = \frac{1}{\sqrt{2}}[E_- e^{i(kz-\omega t+\gamma_-)}\vec{e}_+ + E_+ e^{i(kz-\omega t+\gamma_+)}\vec{e}_-]. \tag{9}$$

Physikalisch ist aber nur der Realteil:

$$\begin{aligned}\vec{E} = \mathrm{Re}\vec{\mathsf{E}} = \frac{1}{2}E_-[\cos(kz-\omega t+\gamma_-)\vec{e}_x - \sin(kz-\omega t+\gamma_-)\vec{e}_y]+ \\ + \frac{1}{2}E_+[\cos(kz-\omega t+\gamma_+)\vec{e}_x + \sin(kz-\omega t+\gamma_+)\vec{e}_y].\end{aligned} \tag{10}$$

Das ist die Summe zweier entgegengesetzt zirkular polarisierter Wellen mit unterschiedlichen Amplituden.

Aufgabe 3 Eichung und Polarisationsvektoren

Der Wellenvektor ist in Vierer-Schreibweise gegeben durch

$$k^{\mu} = (\omega/c, 0, 0, k) \ , \tag{11}$$

wobei

$$k = \frac{\omega}{c} \ . \tag{12}$$

Die Komponenten des Vektorpotentials

$$A^\mu = (\frac{\varphi}{c}, \vec{A}) \tag{13}$$

berechnen sich zu

$$\varphi = c\left[a_L \frac{\omega}{kc} + a_B\right] e^{i(kz-\omega t)} = c(a_L + a_B)e^{i(kz-\omega t)} \;, \tag{14}$$

sowie

$$\vec{A} = [a_1\vec{e}_x + a_2\vec{e}_y + (a_L - a_B)\vec{e}_z]e^{i(kz-\omega t)} \;. \tag{15}$$

Somit erhalten wir für das $\vec{E}$ und das $\vec{B}$-Feld

$$\begin{aligned}\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} &= -ikc(a_L + a_B)e^{i(kz-\omega t)}\vec{e}_z + i\omega\vec{A} \\ &= i\omega(a_1\vec{e}_x + a_2\vec{e}_y - 2a_B\vec{e}_z)e^{i(kz-\omega t)} \;,\end{aligned} \tag{16}$$

sowie

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = ik(-a_2\vec{e}_x + a_1\vec{e}_y)e^{i(kz-\omega t)} \;. \tag{17}$$

i) Da $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A}) = 0$ erhalten wir aus $\nabla\cdot\vec{B} = 0$ keine Bedingungen an die Koeffizienten.

ii) Wegen $\nabla\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\nabla\times\nabla\varphi - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{A}) + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{A}) = 0$, folgen wiederum keine Bedingungen an die Koeffizienten.

iii) Da

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = -i\frac{\omega}{c^2}\vec{E} = k^2(a_1\vec{e}_x + a_2\vec{e}_y - 2a_B\vec{e}_z)e^{i(kz-\omega t)} \;, \tag{18}$$

sowie

$$\nabla\times\vec{B} = k^2(a_1\vec{e}_x + a_2\vec{e}_y)e^{i(kz-\omega t)} \;, \tag{19}$$

folgt aus

$$\nabla\times\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0 \tag{20}$$

die Bedingung $a_B = 0$.

iv) Wegen $\nabla\cdot\vec{E} = 2\omega k a_B e^{i(kz-\omega t)}$ folgt aus $\nabla\cdot\vec{E} = 0$ wiederum die Bedingung $a_B = 0$.

v) Da $\vec{E}$ von a_1, a_2 sowie a_B abhängt (siehe (16)), sind diese Koeffizienten eichunabhängig. Der Koeffizient a_L hingegen ist eichabhängig. Dies sieht man z. B. wenn man auf (14) eine Eichtransformation $\varphi \to \varphi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}$ (wobei Λ ein Skalarfeld ist) anwendet.

vi) Die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes ist wegen $a_B = 0$ gegeben durch

$$\langle U\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon_0}{2}|\vec{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0}|\vec{B}|^2\right) = \frac{\epsilon_0}{4}\left(|\vec{E}|^2 + c^2|\vec{B}|^2\right) = \frac{\epsilon_0}{2}\omega^2(a_1^2 + a_2^2). \tag{21}$$