Institut für Theoretische Physik, Universität Zürich

Lösung für Blatt 12 „Elektrodynamik“

Prof. Dr. T. Gehrmann Blatt 12 – FS 2013

Aufgabe 1 Koaxialer Wellenleiter

a) Wie in der Vorlesung betrachten wir ein Welle mit harmonischer Zeitabhängigkeit und Translationsinvarianz in z-Richtung

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \vec{E}(x,y)e^{i(\pm kz-\omega t)}, \tag{1}$$
$$\vec{B}(\vec{x},t) = \vec{B}(x,y)e^{i(\pm kz-\omega t)} \tag{2}$$

mit $k=\omega/c$ und suchen TEM Wellen mit $E_z=0$ und $B_z=0$, sodass

$$\vec{E}(x,y) = \vec{E}_{\mathrm{T}}(x,y) = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{B}(x,y) = \vec{B}_{\mathrm{T}}(x,y) = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Ausserdem definieren wir

$$\vec{\nabla}_{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{\nabla}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_z \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Aus der Maxwellgleichung $\partial_t\vec{B}+\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$ folgt mit $B_z=0$, dass $(\vec{\nabla}_{\mathrm{T}}\times\vec{E}_{\mathrm{T}})=0$ und somit gilt $\vec{E}_{\mathrm{T}} = -\vec{\nabla}_{\mathrm{T}}\phi(x,y)$ für ein zu bestimmendes Potential $\phi(x,y)$. Da der Raum zwischen den beiden Leitern ladungsfrei ist, gilt zusätzlich $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$ und somit folgt

$$\vec{\nabla}_{\mathrm{T}}^2\phi = 0 \tag{5}$$

mit Randbedingungen $\phi(r=r_1)=c_1$ und $\phi(r=r_2)=c_2$. Aufgrund der Symmetrie des Systems und der Randbedingungen folgt, dass $\phi(x,y)=\phi(r)$ mit $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Somit ist es geeignet, die obige Laplace-Gleichung in Polarkoordinaten zu betrachten, so dass

$$\frac{1}{r}\partial_r\big(r\partial_r\phi(r)\big) = 0 \tag{6}$$

Dies lässt sich durch Integration lösen[1] mit der Lösung

$$\phi(r) = C\ln r + C'. \tag{7}$$

[1] $r\partial_r\phi(r) = C$

Die Konstanten C und C' sind bestimmt durch die Randbedingungen. Daraus folgt das elektrische Feld als

$$\vec{E}_{\mathrm{T}}(\vec{r},t) = \frac{C}{r} e^{i(\pm kz - \omega t)} \vec{e}_r \tag{8}$$

mit $\vec{r} = (x, y)$ und $\vec{e}_r = (x/r, y/r, 0)$. Das $\vec{B}$-Feld folgt aus $\partial_t \vec{B} + \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ mithilfe $(\vec{\nabla}_{\mathrm{T}} \times \vec{E}_{\mathrm{T}}) = 0$, dass

$$\partial_t \vec{B}_{\mathrm{T}} = -\vec{\nabla}_z \times \vec{E}_{\mathrm{T}} \tag{9}$$

und somit

$$-i\omega \vec{B}_{\mathrm{T}} = \mp ik \vec{e}_z \times \vec{E}_{\mathrm{T}}, \tag{10}$$

was sich zu

$$\vec{B}_{\mathrm{T}}(\vec{r},t) = \pm\frac{k}{\omega} \vec{e}_z \times \vec{E}_{\mathrm{T}}(\vec{r},t) = \pm\frac{Ck}{\omega r} e^{i(\pm kz-\omega t)} \vec{e}_\varphi = \pm\frac{C}{cr} e^{i(\pm kz-\omega t)} \vec{e}_\varphi \tag{11}$$

mit $\vec{e}_z \times \vec{e}_r = \vec{e}_\varphi$.

b) Die TEM Mode existiert für beliebige Frequenzen und es gibt keine Grenzfrequenz. Die Phasengeschwindigkeit ist $\omega/k = c$.

c) Die physikalische Grössen sind $\vec{\mathcal{E}} = \mathrm{Re}(\vec{E})$ und $\vec{\mathcal{B}} = \mathrm{Re}(\vec{B})$. Somit ist der Poynting-Vektor

$$\begin{aligned}
\vec{S} &= \frac{1}{\mu_0} \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{B}} = \frac{1}{4\mu_0} \big(\vec{E} + \vec{E}^*\big) \times \big(\vec{B} + \vec{B}^*\big) \\
&= \frac{1}{4\mu_0} \big(\vec{E} \times \vec{B} + \vec{E}^* \times \vec{B} + \vec{E} \times \vec{B}^* + \vec{E}^* \times \vec{B}^*\big).
\end{aligned} \tag{12}$$

Mitteln wir den Poynting-Vektor über eine Periode $T = 2\pi/\omega$ gilt[2] $\langle \vec{E} \times \vec{B} \rangle = \langle \vec{E} \times \vec{B} \rangle = 0$ und $\langle \vec{E} \times \vec{B}^* \rangle = \langle \vec{E}^* \times \vec{B} \rangle = \vec{E} \times \vec{B}^*$, sodass gilt

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}^* = \frac{1}{2\mu_0 c} \frac{C^2}{r^2} \vec{e}_z = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{C^2}{r^2} \vec{e}_z. \tag{13}$$

Die mittlere abgestrahlte Leistung entlang des Zylinders ist

$$P = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} dr\, r\, |\langle \vec{S} \rangle| = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \pi C^2 \ln\!\big(r_2/r_1\big). \tag{14}$$

[2] $\langle A \rangle = \int_0^T A(t)/T$

Aufgabe 2 Dipolstrahlung

a) Das Dipolmoment ist:

$$\vec{p} = 2Qa\cos(\omega_0 t)\vec{e}_z. \tag{15}$$

Von der Vorlesung, ist die durchschnittliche Leistung pro Raumwinkel bei $R = |\vec{r}|$:

$$\langle\frac{dP}{d\Omega}\rangle_T = \langle|\ddot{\vec{p}}|^2\rangle_T\,\frac{\sin^2\theta}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3} = \frac{Q^2a^2\omega_0^4\sin^2\theta}{8\pi^2\varepsilon_0 c^3}\ . \tag{16}$$

Hier, haben wir benutzt $\langle\cos^2(\omega_0 t)\rangle_T = \frac{1}{T}\int_T \cos^2(\omega_0 t)dt = 1/2$, mit $T = 2\pi/\omega_0$. Wir haben den Winkel θ eingeführt, als der Winkel zwischen der z-Achse und der Beobachtung Vektor $\vec{r}$.

b) Mit $\omega_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}c$, ist die Dipolnäherung gültig, wann $R \gg \lambda_0 \gg a$ ist.

c) Aus der Kontinuitätsgleichung

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = -\partial_t\rho\ , \tag{17}$$

ein Strom fliesst durch den Draht zwischen den beiden kleinen Metallkugeln, mit einer Dichte:

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \int_{V_z}\partial_t\rho\,dz\ \vec{e}_z = -\omega_0 Q\,\delta(x)\delta(y)\sin(\omega_0 t)\vec{e}_z\ . \tag{18}$$

In hier, haben wir eine Fläche um die Ladung überlegt (normalen aussen):

$$\begin{aligned}&\int_V dV\,\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = -\int_V dV\,\partial_t\rho = \\ &\int_{\partial V}\vec{j}\cdot\hat{n}\,dS = -\int_V dV\,\partial_t\rho = -\int_V dxdydz\,\partial_t\rho = -\int_{\partial V}dxdy\int_{V_z}dz\,\partial_t\rho\ ,\end{aligned} \tag{19}$$

als ρ ist in x, y, z trennbar. Der Vektor Potential folgt:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V d\vec{r}\,'\frac{\vec{j}(\vec{r}\,',t_{ret})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\ , \tag{20}$$

mit $t_{ret} = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}$, und V steht für den Bereich, der durch die Stromverteilung besetzt. Und dann:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\omega_0\,Q\,\Re\Big[-i\int_V d\vec{r}\,'\frac{\delta(x)\delta(y)e^{-i\omega_0 t_{ret}}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\Big]\ \vec{e}_z\ . \tag{21}$$

Mit $r = |\vec{r}-\vec{r}\,'|$, $R = |\vec{r}|$, $r^2 = R^2 + z'^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}\,'$ und $\vec{r}\cdot\vec{r}\,' = Rz'\cos\theta$ folgt dann:

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\omega_0\,Q\,\Re\Big[-i\int_{-a}^{a}dz'\frac{e^{-i\omega_0(t-\frac{r}{c})}}{r}\Big]\ \vec{e}_z\ = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\omega_0\,Q\,\Re\Big[-ie^{-i\omega_0 t}\int_{-a}^{a}dz'\frac{e^{i\omega_0\frac{r}{c}}}{r}\Big]\ \vec{e}_z = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\omega_0\,Q\,\Re\Big[-ie^{-i\omega_0 t}\int_{-a}^{a}dz'\frac{e^{i\omega_0\frac{\sqrt{R^2+z'^2-2Rz'\cos\theta}}{c}}}{\sqrt{R^2+z'^2-2Rz'\cos\theta}}\Big]\ \vec{e}_z\ .\end{aligned} \tag{22}$$

Diese Lösung ist exakt. Jetzt, nehmen wir an, dass $R \gg a$ ist. Da $|z'| \leq a$ immer ist, folgt es dann:

$$\frac{1}{r} \approx \frac{1}{R} \quad , \quad r \approx R - z' \cos\theta \ , \tag{23}$$

und somit:

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r},t) &\approx \frac{\mu_0 \omega_0 \, Q}{4\pi R} \Re\Big[-ie^{i\omega_0(R/c-t)} \int_{-a}^{a} dz' e^{-i\frac{\omega_0 z' \cos\theta}{c}} \Big] \ \vec{e}_z \ = \\ &= \frac{\mu_0 Qc}{4\pi R \cos\theta} \Re\Big[-2ie^{i\omega_0(R/c-t)} \sin\big[a\cos\theta\omega_0/c\big] \Big] \ \vec{e}_z = \\ &= \frac{\mu_0 Qc}{2\pi R \cos\theta} \sin\big[2\pi\cos\theta a/\lambda_0\big] \sin\big[\omega_0(R/c-t)\big] \ \vec{e}_z \ , \end{aligned} \tag{24}$$

mit $\omega_0 = c\,2\pi/\lambda_0$. In Kugelkoordinaten $\{\vec{e}_R, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi\}$, $\vec{e}_z = \cos\theta\,\vec{e}_R - \sin\theta\,\vec{e}_\theta$. Somit, $\vec{A} = A_R\vec{e}_R + A_\theta\vec{e}_\theta$,

$$\begin{aligned} A_R &= \frac{\mu_0 Qc}{2\pi R} \sin\big[2\pi\cos\theta a/\lambda_0\big] \sin\big[\omega_0(R/c-t)\big] \\ A_\theta &= -\frac{\mu_0 Qc\tan\theta}{2\pi R} \sin\big[2\pi\cos\theta a/\lambda_0\big] \sin\big[\omega_0(R/c-t)\big] \ , \end{aligned} \tag{25}$$

und:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{R}[\partial_R(RA_\theta) - \partial_\theta A_R]\vec{e}_\varphi \approx \frac{1}{R}\partial_R(RA_\theta)\vec{e}_\varphi + O(1/R^2)\vec{e}_\varphi \ . \tag{26}$$

Mit

$$\frac{1}{R}\partial_R(RA_\theta) = -\frac{\mu_0\omega_0 Q\tan\theta}{2\pi R} \sin\big[2\pi\cos\theta a/\lambda_0\big] \cos\big[\omega_0(R/c-t)\big] \ , \tag{27}$$

$$\vec{B} \approx -\frac{\mu_0\omega_0 Q\tan\theta}{2\pi R} \sin\big[2\pi\cos\theta a/\lambda_0\big] \cos\big[\omega_0(R/c-t)\big]\vec{e}_\varphi \, . \tag{28}$$

Wir können dann feststellen:

$$\langle \vec{S}\,\rangle_T = \frac{c}{\mu_0}\langle|\vec{B}|^2\rangle_T\,\vec{e}_R = \frac{c}{2\mu_0}\frac{\mu_0^2\omega_0^2 Q^2\tan^2\theta}{4\pi^2 R^2} \sin^2\big[2\pi\cos\theta a/\lambda_0\big]\,\vec{e}_R \, . \tag{29}$$

Und somit,

$$\langle\frac{dP}{d\Omega}\rangle_T = \langle|\vec{S}|\,\rangle_T R^2 = \frac{\mu_0 c\,\omega_0^2 Q^2\tan^2\theta}{8\pi^2} \sin^2\big[2\pi\cos\theta a/\lambda_0\big] \ , \tag{30}$$

wann $\lambda_0 \gg a$ ist, können wir schreiben $\sin\big[2\pi\cos\theta a/\lambda_0\big] \approx 2\pi a\cos\theta/\lambda_0 = a\cos\theta\,\omega_0/c$, und dann:

$$\langle\frac{dP}{d\Omega}\rangle_T = \frac{\mu_0 a^2 Q^2\omega_0^4\sin^2\theta}{8\pi^2 c} \ . \tag{31}$$

Mit $\mu_0 = 1/c^2\varepsilon_0$, folgt es dann:

$$\langle\frac{dP}{d\Omega}\rangle_T = \frac{a^2 Q^2\omega_0^4\sin^2\theta}{8\pi^2\varepsilon_0 c^3} \ . \tag{32}$$