

Lösung für Blatt 2 „Elektrodynamik“

Aufgabe 1 Geladene Kreisscheibe I

(a) Mit den Ortsvektoren in Zylinderkoordinaten

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{r}' = \begin{pmatrix} \rho' \cos \varphi' \\ \rho' \sin \varphi' \\ z' \end{pmatrix} \quad (1)$$

finden wir

$$\begin{aligned} (\vec{r} - \vec{r}')^2 &= (\vec{r} - \vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}') = \vec{r}^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}' + \vec{r}'^2 \\ &= \rho^2 + z^2 - 2[\cos \varphi \cos \varphi' + \sin \varphi \sin \varphi']\rho\rho' - 2zz' + \rho'^2 + z'^2 \\ &= \rho^2 + \rho'^2 + (z - z')^2 - 2\rho\rho' \cos(\varphi' - \varphi) \end{aligned} \quad (2)$$

und somit

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\varphi' - \varphi) + (z - z')^2} \quad (3)$$

(b)

$$\begin{aligned} \phi(\rho, \varphi, z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \frac{\rho_{\text{el}}(\rho', \varphi', z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty d\rho' \rho' \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-\infty}^\infty dz' \frac{Q\delta(z')\Theta(R - \rho')}{\pi R^2 \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 + (z - z')^2 - 2\rho\rho' \cos(\varphi' - \varphi)}} \\ &= \frac{Q}{4\pi^2\epsilon_0 R^2} \int_0^\infty d\rho' \rho' \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{\Theta(R - \rho')}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 + z^2 - 2\rho\rho' \cos(\varphi' - \varphi)}} \\ &= \frac{Q}{4\pi^2\epsilon_0 R^2} \int_0^R d\rho' \rho' \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 + z^2 - 2\rho\rho' \cos(\varphi' - \varphi)}} \end{aligned} \quad (4)$$

Für eine beliebige Funktion f gilt

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\varphi' f(\cos(\varphi' - \varphi)) &\stackrel{\tilde{\varphi} = \varphi' - \varphi}{=} \int_{-\varphi}^{2\pi - \varphi} d\tilde{\varphi} f(\cos \tilde{\varphi}) \\ &= \int_{-\varphi}^0 d\tilde{\varphi} f(\cos \tilde{\varphi}) + \int_0^{2\pi} d\tilde{\varphi} f(\cos \tilde{\varphi}) + \int_{2\pi}^{2\pi - \varphi} d\tilde{\varphi} f(\cos \tilde{\varphi}) \\ &\stackrel{\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi} + 2\pi}{=} \int_{-\varphi}^0 d\tilde{\varphi} f(\cos \tilde{\varphi}) + \int_0^{2\pi} d\tilde{\varphi} f(\cos \tilde{\varphi}) + \int_0^{-\varphi} d\hat{\varphi} f(\cos(\hat{\varphi} - 2\pi)) \\ &= \int_0^{2\pi} d\tilde{\varphi} f(\cos \tilde{\varphi}), \end{aligned} \quad (5)$$

sodass sich der Ausdruck für das Potential vereinfacht zu

$$\phi(\rho, \varphi, z) = \frac{Q}{4\pi^2\epsilon_0 R^2} \int_0^R d\rho' \rho' \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 + z^2 - 2\rho\rho' \cos \varphi'}}, \quad (6)$$

unabhängig von φ . Somit gilt

$$\phi(\rho, \varphi, z) = \phi(\rho, z) \quad (7)$$

und das Potential besitzt Rotationssymmetrie um die z -Achse.

(c) Auf der z -Achse ($\rho = 0$) ist das Potential

$$\begin{aligned} \phi(0, z) &= \frac{Q}{4\pi^2\epsilon_0 R^2} \int_0^R d\rho' \rho' \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi'}_{=2\pi} \frac{1}{\sqrt{\rho'^2 + z^2}} \\ &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \int_0^R d\rho' \frac{\rho'}{\sqrt{\rho'^2 + z^2}} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left[\sqrt{\rho'^2 + z^2} \right]_0^R \\ &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left(\sqrt{R^2 + z^2} - |z| \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Wir entwickeln nun dieses Potential für $R/|z| \ll 1$ (also für z gross im Vergleich mit R). Mit $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x + \mathcal{O}(x^2)$ folgt

$$\begin{aligned} \phi(0, z) &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} |z| \left(\sqrt{1 + \left(\frac{R}{z}\right)^2} - 1 \right) \\ &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R} \frac{|z|}{R} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{z}\right)^2 + \mathcal{O}\left[\left(\frac{R}{z}\right)^4\right] - 1 \right) \\ &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{1}{2} \frac{R}{z} + \mathcal{O}\left[\left(\frac{R}{z}\right)^3\right] \right) \\ &= \underbrace{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |z|}}_{\text{Potential einer Punktladung!}} + \mathcal{O}\left[\left(\frac{R}{z}\right)^3\right] \end{aligned} \quad (9)$$

Aufgabe 2 Sphärische Multipolmomente eines Würfels

(a) Alle Ladungen haben den gleichen Abstand vom Ursprung (halbe Raumdiagonale)

$$R = \frac{a}{2}\sqrt{3}. \quad (10)$$

Ladungen ① - ④ haben das gleiche z und somit das gleiche $\tilde{\theta}$ mit

$$\begin{aligned} \cos \tilde{\theta} &= \frac{z}{R} = \frac{a/2}{a/2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \Rightarrow \tilde{\theta} &= \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 54,74^\circ \quad \text{oder} \quad 0,955 \text{ rad} \end{aligned} \quad (11)$$

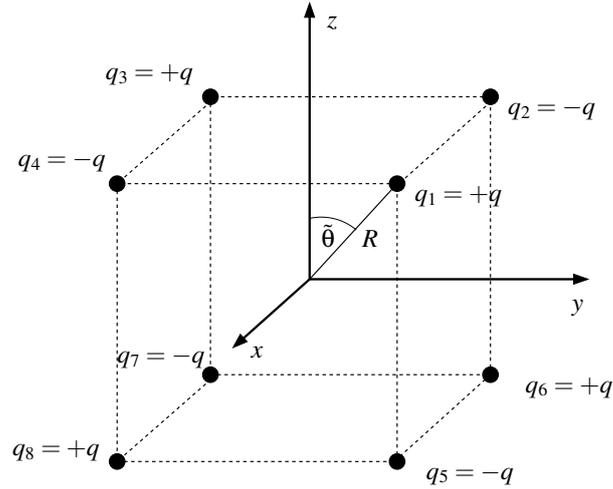


Abbildung 1: Positive und negative Punktladungen $\pm q$ sind auf den Ecken eines Würfels mit Kantenlänge a angeordnet.

Zusammengefasst befinden sich die Ladungen \oplus / \ominus in kartesischen Koordinaten und Kugelkoordinaten an folgenden Positionen:

\oplus	①	$\vec{r}_1 = \left(+\frac{a}{2}, +\frac{a}{2}, +\frac{a}{2}\right)$
		$r = R \quad \theta = \theta \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$
\ominus	②	$\vec{r}_2 = \left(-\frac{a}{2}, +\frac{a}{2}, +\frac{a}{2}\right)$
		$r = R \quad \theta = \theta \quad \varphi = \frac{3\pi}{4}$
\oplus	③	$\vec{r}_3 = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, +\frac{a}{2}\right)$
		$r = R \quad \theta = \theta \quad \varphi = \frac{5\pi}{4}$
\ominus	④	$\vec{r}_4 = \left(+\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, +\frac{a}{2}\right)$
		$r = R \quad \theta = \theta \quad \varphi = \frac{7\pi}{4}$
\ominus	⑤	$\vec{r}_5 = \left(+\frac{a}{2}, +\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right)$
		$r = R \quad \theta = \pi - \theta \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$
\oplus	⑥	$\vec{r}_6 = \left(-\frac{a}{2}, +\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right)$
		$r = R \quad \theta = \pi - \theta \quad \varphi = \frac{3\pi}{4}$
\ominus	⑦	$\vec{r}_7 = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right)$
		$r = R \quad \theta = \pi - \theta \quad \varphi = \frac{5\pi}{4}$
\oplus	⑧	$\vec{r}_8 = \left(+\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right)$
		$r = R \quad \theta = \pi - \theta \quad \varphi = \frac{7\pi}{4}$

(b) Die Ladungsdichte in kartesischen Koordinaten ist

$$\begin{aligned} \rho_{\text{el}}(x, y, z) = & +q\delta(\vec{r} - \vec{r}_1) - q\delta(\vec{r} - \vec{r}_2) + q\delta(\vec{r} - \vec{r}_3) - q\delta(\vec{r} - \vec{r}_4) \\ & - q\delta(\vec{r} - \vec{r}_5) + q\delta(\vec{r} - \vec{r}_6) - q\delta(\vec{r} - \vec{r}_7) + q\delta(\vec{r} - \vec{r}_8). \end{aligned} \quad (12)$$

Mithilfe der Identität auf dem Aufgabenblatt findet man die Ladungsdichte in

Kugelkoordinaten als

$$\begin{aligned}
\rho_{\text{el}}(r, \theta, \rho) &= + q \frac{1}{r^2 \sin \theta} \delta(r - R) \delta(\theta - \tilde{\theta}) \delta(\varphi - \pi/4) \\
&\quad - q \frac{1}{r^2 \sin \theta} \delta(r - R) \delta(\theta - \tilde{\theta}) \delta(\varphi - 3\pi/4) \\
&\quad + q \frac{1}{r^2 \sin \theta} \delta(r - R) \delta(\theta - \tilde{\theta}) \delta(\varphi - 5\pi/4) \\
&\quad - \dots \\
&= \frac{q}{r^2 \sin \theta} \delta(r - R) \delta(\theta - \tilde{\theta}) \left[\delta(\varphi - \frac{\pi}{4}) - \delta(\varphi - \frac{3\pi}{4}) \right. \\
&\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \left. + \delta(\varphi - \frac{5\pi}{4}) - \delta(\varphi - \frac{7\pi}{4}) \right] \\
&\quad - \frac{q}{r^2 \sin \theta} \delta(r - R) \delta(\theta - (\pi - \tilde{\theta})) \left[\delta(\varphi - \frac{\pi}{4}) - \delta(\varphi - \frac{3\pi}{4}) \right. \\
&\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \left. + \delta(\varphi - \frac{5\pi}{4}) - \delta(\varphi - \frac{7\pi}{4}) \right] \\
&= \frac{q}{r^2 \sin \theta} \delta(r - R) \left(\delta(\theta - \tilde{\theta}) - \delta(\theta - (\pi - \tilde{\theta})) \right) \\
&\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \left[\delta(\varphi - \frac{\pi}{4}) - \delta(\varphi - \frac{3\pi}{4}) + \delta(\varphi - \frac{5\pi}{4}) - \delta(\varphi - \frac{7\pi}{4}) \right] \tag{13}
\end{aligned}$$

(c) Die sphärischen Dipolmomente berechnen sich zu

$$\begin{aligned}
q_{1,1} &= \int d^3\vec{r} \rho_{\text{el}}(\vec{r}) r Y_{1,1}^*(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 \sin\theta \rho_{\text{el}}(\vec{r}) r \sin\theta e^{-i\varphi} \\
&= q \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int_0^\infty dr r \delta(r - R) \int_0^\pi d\theta \sin\theta (\delta(\theta - \tilde{\theta}) - \delta(\theta - (\pi - \tilde{\theta}))) \\
&\quad \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\delta(\varphi - \frac{\pi}{4}) - \delta(\varphi - \frac{3\pi}{4}) + \delta(\varphi - \frac{5\pi}{4}) - \delta(\varphi - \frac{7\pi}{4}) \right] e^{-i\varphi} \\
&= q \sqrt{\frac{3}{4\pi}} R \underbrace{(\sin\tilde{\theta} - \sin(\pi - \tilde{\theta}))}_{=0} \underbrace{(e^{-i\pi/4} - e^{-3i\pi/4} + e^{-5i\pi/4} - e^{-7i\pi/4})}_{=0} = 0
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
q_{1,0} &= \int d^3\vec{r} \rho_{\text{el}}(\vec{r}) r Y_{1,0}^*(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 \sin\theta \rho_{\text{el}}(\vec{r}) r \cos\theta \\
&= q \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int_0^\infty dr r \delta(r - R) \int_0^\pi d\theta \cos\theta (\delta(\theta - \tilde{\theta}) - \delta(\theta - (\pi - \tilde{\theta}))) \\
&\quad \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\delta(\varphi - \frac{\pi}{4}) - \delta(\varphi - \frac{3\pi}{4}) + \delta(\varphi - \frac{5\pi}{4}) - \delta(\varphi - \frac{7\pi}{4}) \right] \\
&= q \sqrt{\frac{3}{4\pi}} R (\cos\tilde{\theta} - \cos(\pi - \tilde{\theta})) \underbrace{(1 - 1 + 1 - 1)}_{=0} = 0
\end{aligned} \tag{15}$$

$$q_{1,-1} = (-1)^1 q_{1,1}^* = 0 \tag{16}$$

und verschwinden. Man kann sich auch leicht überlegen, dass aufgrund der Symmetrie der Ladungsverteilung kein nicht-verschwindendes Dipolmoment existieren kann.

Aus obigen Rechnungen folgern wir

- i) $q_{l,m}$ ist null für alle l, m bei denen der θ -Anteil von $Y_{l,m}^*$ ein reiner Sinus ist (ohne Cosinus) [wegen $\sin\tilde{\theta} = \sin(\pi - \tilde{\theta})$].
- ii) $q_{l,m}$ ist null falls a) $Y_{l,m} \sim e^{\pm i\varphi}$ oder b) nicht von φ abhängt.

Somit schliessen wir für die sphärischen Quadrupol- und Oktupolmomente:

$$\begin{aligned}
q_{2,2} &= 0 && \text{wegen i)} \\
q_{2,1} &= 0 && \text{wegen ii)a)} \\
q_{2,0} &= 0 && \text{wegen ii)b)} \\
q_{2,-1} &= (-1) \cdot q_{2,1}^* = 0 \\
q_{2,-2} &= \cdot q_{2,2}^* = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{3,3} &= 0 && \text{wegen i)} \\
q_{3,2} &\neq 0 && \text{siehe unten} \\
q_{3,1} &= 0 && \text{wegen ii)a)} \\
q_{3,0} &= 0 && \text{wegen ii)b)} \\
q_{3,-1} &= (-1) \cdot q_{3,1}^* = 0 \\
q_{3,-2} &= q_{3,2}^* \neq 0 && \text{siehe unten} \\
q_{3,-3} &= (-1) \cdot q_{3,3}^* = 0
\end{aligned}$$

Somit müssen wir also nur $q_{3,2} = q_{3,-2}^*$ berechnen:

$$\begin{aligned}
q_{3,2} &= \int d^3\vec{r} \rho_{\text{el}}(\vec{r}) r^3 Y_{3,2}^*(\theta, \varphi) \\
&= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{105}{2\pi}} \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 \sin\theta \rho_{\text{el}}(\vec{r}) r^3 Y_{3,2}^*(\theta, \varphi) \\
&= \frac{q}{4} \sqrt{\frac{105}{2\pi}} \int_0^\infty dr r^3 \delta(r-R) \int_0^\pi d\theta \sin^2\theta \cos\theta (\delta(\theta - \tilde{\theta}) - \delta(\theta - (\pi - \tilde{\theta}))) \\
&\quad \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\delta(\varphi - \frac{\pi}{4}) - \delta(\varphi - \frac{3\pi}{4}) + \delta(\varphi - \frac{5\pi}{4}) - \delta(\varphi - \frac{7\pi}{4}) \right] e^{-2i\varphi} \\
&= \frac{q}{4} \sqrt{\frac{105}{2\pi}} R^3 [\sin^2\tilde{\theta} \cos\tilde{\theta} + \sin\tilde{\theta} \cos^2\tilde{\theta}] \cdot [-i - i + (-i) + (-i)] \\
&= -2iq \sqrt{\frac{105}{2\pi}} R^3 [\cos\tilde{\theta} - \cos^3\tilde{\theta}] \\
&= -2iq \sqrt{\frac{105}{2\pi}} \frac{a^3}{8} 2\sqrt{3} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \right] = -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{105}{2\pi}} qa^3 \tag{17}
\end{aligned}$$

Bemerkung: Welche Multipolmomente nicht-verschwindend sind, hängt direkt mit der Symmetrie der Ladungsverteilung zusammen. Sei S eine Symmetrioperation (z.B. R_z^π), welche die Ladungsverteilung invariant lässt, i.e.

$$\rho_{\text{el}}(S\vec{r}) = \rho_{\text{el}}(\vec{r}). \tag{18}$$

Betrachten wir nun ein Multipolmoment

$$q_{l,m} = \int d^3\vec{r} \rho_{\text{el}}(\vec{r}) r^l Y_{l,m}^*(\theta, \varphi) \tag{19}$$

und beschränken wir uns auf Symmetrien \tilde{S} , die den Ursprung invariant lassen (Rotationen um Achsen durch Ursprung, Punktspiegelung am Ursprung, Spiegelungen an Ebenen die den Ursprung enthält), folgt

$$\begin{aligned}
q_{l,m} &= \int d^3\vec{r} \rho_{\text{el}}(\vec{r}) r^l Y_{l,m}^*(\theta, \varphi) \\
&= \int d^3\vec{r} \rho_{\text{el}}(\tilde{S}\vec{r}) r^l Y_{l,m}^*(\theta, \varphi) \\
&= \int d^3\vec{r}' \rho_{\text{el}}(\vec{r}') r'^l Y_{l,m}^*(\tilde{S}^{-1}[\theta', \varphi']).
\end{aligned}$$

Falls es eine Symmetrie \tilde{S} der Ladungsverteilung gibt, für die

$$Y_{l,m}^*(\tilde{S}^{-1}[\theta, \varphi]) = -Y_{l,m}^*(\theta, \varphi) \quad (20)$$

folgt direkt, dass das zugehörige Multipolmoment $q_{l,m}$ verschwindet.

In unserem Beispiel hat die Ladungsverteilung z.B. die Symmetrie R_z^π , also $\rho_{\text{el}}(R_z^\pi \vec{r}) = \rho_{\text{el}}(\vec{r})$. Die Wirkung dieser Symmetrie ist $(R_z^\pi[\theta, \varphi]) = (\theta, \varphi + \pi)$. Wir sehen nun direkt, dass

$$\begin{aligned} Y_{1,1}^*(R_z^{-\pi}[\theta, \varphi]) &= Y_{1,1}^*(\theta, \varphi - \pi) = -Y_{1,1}^*(\theta, \varphi), \\ Y_{2,1}^*(R_z^{-\pi}[\theta, \varphi]) &= Y_{2,1}^*(\theta, \varphi - \pi) = -Y_{2,1}^*(\theta, \varphi), \\ Y_{3,1}^*(R_z^{-\pi}[\theta, \varphi]) &= Y_{3,1}^*(\theta, \varphi - \pi) = -Y_{3,1}^*(\theta, \varphi), \\ Y_{3,3}^*(R_z^{-\pi}[\theta, \varphi]) &= Y_{3,3}^*(\theta, \varphi - \pi) = -Y_{3,3}^*(\theta, \varphi), \end{aligned} \quad (21)$$

und somit verschwinden $q_{1,1}$, $q_{2,1}$, $q_{3,1}$ und $q_{3,3}$. Eine weitere Symmetrie ist $R_z^{\pi/2} \circ S_{xy}$ (wobei S_{xy} eine Spiegelung an der xy -Ebene beschreibt). Die Wirkung dieser Symmetrie ist $(R_z^{\pi/2} \circ S_{xy}[\theta, \varphi]) = (\pi - \theta, \varphi + \pi/2)$. Mithilfe dieser Symmetrie lässt sich einfach zeigen, dass $q_{1,0}$, $q_{2,2}$ und $q_{3,0}$ ebenfalls verschwinden.

Um zu zeigen, dass $q_{2,0}$ ebenfalls verschwindet, muss man das Argument noch etwas erweitern. Sei \tilde{S} eine Symmetrie der Ladungsverteilung, sodass $\rho_{\text{el}}(\tilde{S}\vec{r}) = -\rho_{\text{el}}(\vec{r})$, dann muss gelten, dass $\tilde{S}Y_{l,m}^* = -Y_{l,m}^*$, damit $q_{l,m}$ nicht-verschwindend ist (folgt analog zum Fall oben). In unserem Beispiel ist $R_z^{\pi/2}$ eine solche Symmetrie der Ladungsverteilung, also $\rho_{\text{el}}(R_z^{\pi/2}\vec{r}) = -\rho_{\text{el}}(\vec{r})$. Da $R_z^{\pi/2}Y_{2,0}^* = Y_{2,0}^*$ folgt, dass $q_{2,0} = 0$. Somit kann aus Symmetriebetrachtungen nur $q_{3,2}$ nicht-verschwindend sein.

Aufgabe 3 Geladene Kreisscheibe II

(a) Wir berechnen nun das Dipolmoment

$$\vec{p} = \int d^3\vec{r} \rho_{\text{el}}(\vec{r}) \vec{r}. \quad (22)$$

Wir finden

$$\begin{aligned} p_x &= \int d^3\vec{r} \rho_{\text{el}}(\vec{r}) x = \int d^3\vec{r} \rho_{\text{el}}(\vec{r}) \rho \cos \varphi \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty d\rho \rho \frac{Q}{\pi R^2} \underbrace{\int_{-\infty}^\infty dz \delta(z) \theta(R - \rho)}_{=1} \rho \cos^2 \varphi \\ &= \frac{Q}{\pi R^2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \cos^2 \varphi}_{=\pi} \underbrace{\int_0^R d\rho \rho^2}_{=R^3/3} = \frac{1}{3} QR \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned}
p_y &= \int d^3\vec{r} \rho_{\text{el}}(\vec{r}) y = \int d^3\vec{r} \rho_{\text{el}}(\vec{r}) \rho \sin \varphi \\
&= \frac{Q}{\pi R^2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \sin \varphi \cos \varphi}_{=0} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dz \delta(z)}_{=1} \int_0^{\infty} d\rho \rho^2 \theta(R - \rho) = 0 \quad (24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_z &= \int d^3\vec{r} \rho_{\text{el}}(\vec{r}) z \\
&= \frac{Q}{\pi R^2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \cos \varphi}_{=0} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dz \delta(z) z}_{=0} \int_0^{\infty} d\rho \rho \theta(R - \rho) = 0 \quad (25)
\end{aligned}$$

(b) Für die sphärischen Dipolmomente finden wir

$$\begin{aligned}
q_{1,1} &= \int d^3\vec{r} \rho_{\text{el}}(\vec{r}) \cdot \vec{r} \cdot Y_{1,1}^* \\
&= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int_0^{\infty} dr r^3 \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \cos \varphi e^{-i\varphi}}_{=\pi} \frac{Q}{\pi R^2} \int_0^{\pi} d\theta \sin^2 \theta \delta(z) \theta(R - \rho) \\
&= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{Q}{R^2} \int_0^{\infty} dr r^3 \int_0^{\pi} d\theta \sin^2 \theta \frac{1}{r} \delta(\theta - \pi/2) \theta(R - r) \\
&= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{Q}{R^2} \frac{R^3}{3} \sin^2(\pi/2) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{QR}{3} \quad (26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{1,0} &= \int d^3\vec{r} \rho_{\text{el}}(\vec{r}) \cdot \vec{r} \cdot Y_{1,0}^* \\
&= -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{Q}{\pi R^2} \int_0^{\infty} dr r^3 \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \cos \varphi}_{=0} \underbrace{\int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \cos \theta \delta(z) \theta(R - \rho)}_{=0} = 0 \quad (27)
\end{aligned}$$

$$q_{1,-1} = (-1) \cdot q_{1,1}^* = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{QR}{3}. \quad (28)$$

Hierbei wurde benutzt, dass

$$\begin{aligned}
\delta(z) \theta(R - \rho) &= \delta(z) \theta(R - \sqrt{x^2 + y^2}) = \delta(z) \theta(R - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \\
&= \delta(z) \theta(R - r) = \delta(r \cos \theta) \theta(R - r) = \frac{1}{r} \delta(\cos \theta) \theta(R - r) \quad (29)
\end{aligned}$$

Es ist leicht, zu verifizieren, dass

$$q_{1,1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_x - ip_y) \quad (30)$$

$$q_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_z \quad (31)$$

$$q_{1,-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_x + ip_y) \quad (32)$$