Institut für Theoretische Physik, Universität Zürich

Lösung für Blatt 3 „Elektrodynamik“

Prof. Dr. T. Gehrmann — Blatt 3 – FS 2013

Aufgabe 1 Spiegelladungen I

(a) Um die Oberfläche der Halbkugel zur Äquipotentialfläche zu machen, plazieren wir eine Ladung innerhalb der Kugel. Wegen Rotational Symmetrie um z-Achse, wird die Spiegelladung auf der z-Achse liegen. Der Potential der zwei Ladungen ist

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{\left|\vec{r}-\vec{d}\right|} + \frac{q_1}{\left|\vec{r}-\vec{d}_1\right|}\right) \tag{1}$$

und soll

$$\phi(\vec{r}) = 0 \text{ für } |\vec{r}| = R. \tag{2}$$

So ist

$$\frac{q}{\sqrt{R^2+d^2-2Rd\cos\theta}} + \frac{q_1}{\sqrt{R^2+d_1^2-2Rd_1\cos\theta}} = 0$$

eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer Äquipotentialfläche bei $|\vec{r}| = R$. Durch geeignetes Ausklammern gilt nun

$$\frac{q}{R\sqrt{1+\frac{d^2}{R^2}-2\frac{d}{R}\cos\theta}} + \frac{q_1}{d_1\sqrt{1+\frac{R^2}{d_1^2}-2\frac{R}{d_1}\cos\theta}} = 0.$$

Die Bedingung ist sicherlich erfüllt, wenn gilt

$$\frac{q}{R} = -\frac{q_1}{d_1} \text{ und } \frac{d}{R} = \frac{R}{d_1},$$

und somit

$$d_1 = \frac{R^2}{d} \text{ und } q_1 = -\frac{qR}{d},$$

wie in der Vorlesung für die Spiegelladung im Fall einer geladenen Kugel.

(b) Da in der Anordnung der Teilaufgabe a) das Potential auf der Oberfläche der Vollkugel $\phi = 0$ ist, wird diese Bedingung auch bei Spiegelung an der (x, y)-Ebene und Ladungsumkehr erfüllt bleiben. Diese Spiegelung macht die (x, y)-Ebene zur Äquipotentialfläche auf Potential $\phi = 0$. Die weiteren zwei Ladungen sind $q_2 = -q_1$ am Ort $\vec{d}_2 = -\vec{d}_1$ und $q_3 = -q$ am Ort $\vec{d}_3 = -\vec{d}$.

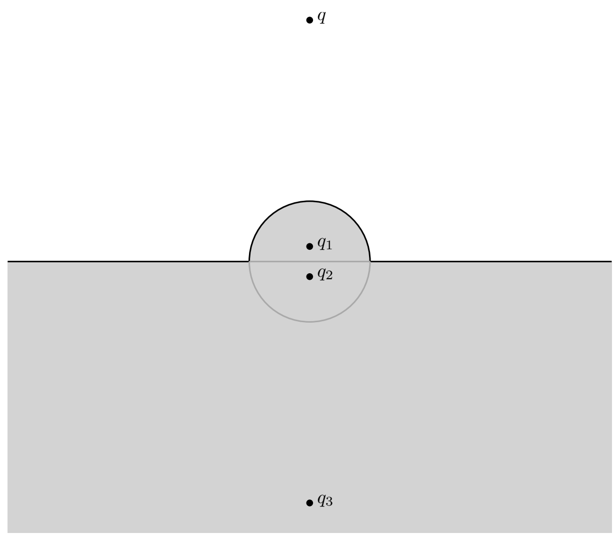

Abbildung 1: Anordnung der Ladungen.

(c)

$$
\begin{aligned}
\phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{|\vec{r}-\vec{d}|}+\frac{q_1}{|\vec{r}-\vec{d}_1|}+\frac{q_2}{|\vec{r}-\vec{d}_2|}+\frac{q_3}{|\vec{r}-\vec{d}_3|}\right)\\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{d}\right|}-\frac{R}{d\left|\vec{r}-\vec{d}_1\right|}+\frac{R}{d\left|\vec{r}+\vec{d}_1\right|}-\frac{1}{\left|\vec{r}+\vec{d}\right|}\right)\\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}}\right.\\
&\quad \left.-\frac{R}{d}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-\frac{R^2}{d})^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+\frac{R^2}{d})^2}}\right)\right)\\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{d^2-2zd}{r^2}}}-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{d^2+2zd}{r^2}}}\right.\\
&\quad \left.-\frac{R}{d}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\frac{R^4}{d^2}-2z\frac{R^2}{d}}{r^2}}}-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\frac{R^4}{d^2}+2z\frac{R^2}{d}}{r^2}}}\right)\right)
\end{aligned}
$$

Mit $\sqrt{1+\varepsilon}=1-1/2\varepsilon+O(\varepsilon^2)$ und $r\gg d$, bekommen wir

$$
\phi(\vec{r})=\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\left(\frac{2zd}{r^2}-\frac{R}{d}\frac{2zR^2}{dr^2}\right)=\frac{qz}{2\pi\epsilon_0 r^3}\left(d-\frac{R^3}{d^2}\right)
$$

Die Kraft auf die Ladung ist

$$
\begin{aligned}
\vec{F}_0 &= \vec{F}_{01} + \vec{F}_{02} + \vec{F}_{03} \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{(d-d_1)^2} + \frac{q_2}{(d-d_2)^2} + \frac{q_3}{(d-d_3)^2}\right)\vec{e}_z \\
&= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d}\left(-\frac{R}{\left(d-\frac{R^2}{d}\right)^2} + \frac{R}{\left(d+\frac{R^2}{d}\right)^2} - \frac{1}{4d}\right)\vec{e}_z \\
&= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d^3}\left(-\frac{R}{\left(1-\frac{R^2}{d^2}\right)^2} + \frac{R}{\left(1+\frac{R^2}{d^2}\right)^2} - \frac{d}{4}\right)\vec{e}_z,
\end{aligned}
$$

und ist anziehend, da bereits die ersten zwei Summanden zusammen immer negativ sind.

Aufgabe 2 Spiegelladungen II

(a) Aus Abbildung 2 folgt, dass wir 6 Spiegelladungen brauchen, um das Potential zu berechnen. Die Orte der 6 Ladungen in zylindrischen Koordinaten sind:

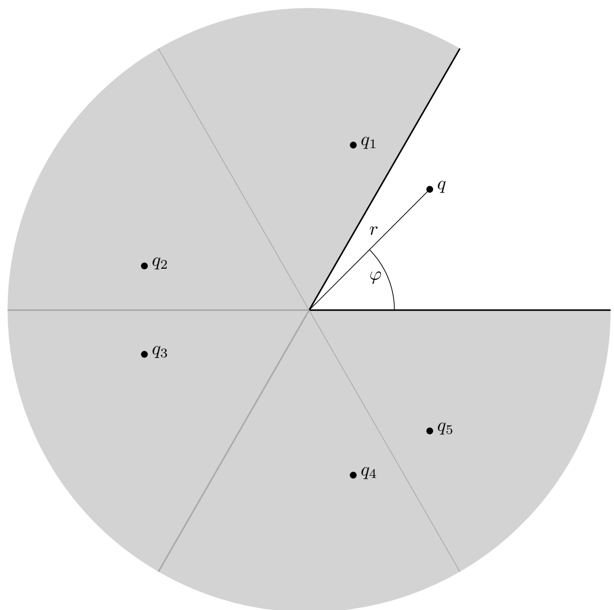

Abbildung 2: Anordnung der Ladungen.

$$
\begin{array}{ll}
q & (r, \varphi, z_0) \\
q_1 = -q & \left(r, -\varphi + \frac{2\pi}{3}, z_0\right) \\
q_2 = q & \left(r, \varphi + \frac{2\pi}{3}, z_0\right) \\
q_3 = -q & \left(r, -\varphi - \frac{2\pi}{3}, z_0\right) \\
q_4 = q & \left(r, \varphi - \frac{2\pi}{3}, z_0\right) \\
q_5 = -q & (r, -\varphi, z_0)
\end{array}
$$

Das Potential ist

$$\phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=0}^{5} \frac{(-1)^i}{\sqrt{(x - r\cos\varphi_i)^2 + (y - r\sin\varphi_i)^2 + (z - z_0)^2}},$$

wobei Index 0 für die Punktladung q benutzt wird .

(b) Die Kraft auf die Ladung q (am Ort $\vec{x}$) ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
F(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{5} \frac{q_i}{\sqrt{(x - r\cos\varphi_i)^2 + (y - r\sin\varphi_i)^2 + (z_0 - z_0)^2}^3} \begin{pmatrix} x - r\cos\varphi_i \\ y - r\sin\varphi_i \\ z_0 - z_0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{5} \frac{q_i}{\sqrt{(r\cos\varphi - r\cos\varphi_i)^2 + (r\sin\varphi - r\sin\varphi_i)^2}^3} \begin{pmatrix} r\cos\varphi - r\cos\varphi_i \\ r\sin\varphi - r\sin\varphi_i \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{5} \frac{(-1)^i}{\sqrt{2r^2(1 - \cos(\varphi - \varphi_i))}^3} \begin{pmatrix} r\cos\varphi - r\cos\varphi_i \\ r\sin\varphi - r\sin\varphi_i \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 Randwertproblem und Separationsansatz

(a) Um das Laplace-Gleichung $\Delta\phi = 0$ zu lösen, benutzen wir den Ansatz $\phi(x, y, z) = \vartheta(x)\Lambda(y)\Omega(z)$.

$$\Delta\phi(x, y, z) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\vartheta(x)\Lambda(y)\Omega(z) + \vartheta(x)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Lambda(y)\Omega(z) + \vartheta(x)\Lambda(y)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Omega(z) = 0.$$

Division durch $\vartheta(x)\Lambda(y)\Omega(z)$, ergibt

$$\frac{1}{\vartheta(x)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\vartheta(x) + \frac{1}{\Lambda(y)}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Lambda(y) + \frac{1}{\Omega(z)}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Omega(z) = 0.$$

Die drei separierten Differentialgleichungen sind

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\vartheta(x)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\vartheta(x) &= -\alpha^2 \\
\frac{1}{\Lambda(y)}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Lambda(y) &= -\beta^2 \\
\frac{1}{\Omega(z)}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Omega(z) &= \alpha^2 + \beta^2 =: \gamma^2
\end{aligned}$$

mit Lösungen

$$\begin{aligned}
\vartheta(x) &= A_1 e^{i\alpha x} + A_2 e^{-i\alpha x} \\
\Lambda(y) &= B_1 e^{i\beta y} + B_2 e^{-i\beta y} \\
\Omega(z) &= D_1 e^{\gamma z} + D_2 e^{-\gamma z}
\end{aligned}$$

Mit der Randbedingung $\vartheta(0) = 0$ erhalten wir $A_1 = -A_2$ und

$$\vartheta(x) = A_1 e^{i\alpha x} - A_1 e^{-i\alpha x} = \frac{A_1}{2i}\sin(\alpha x) =: A\sin(\alpha x).$$

Und mit $\vartheta(a) = 0$ erhalten wir $\alpha a = n\pi$. Somit ist $\vartheta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\alpha_n x)$, mit $\alpha_n = n\pi/a$. Analog erhalten wir $\Lambda(y) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin(\beta_m y)$, mit $\beta_m = m\pi/a$. Mit der Randbedingung $\Omega(0) = 0$ erhalten wir $D_1 = -D_2$ und

$$\Omega(z) = D_1 e^{\gamma z} - D_1 e^{-\gamma z} = \frac{D_1}{2}\sinh(\gamma z) =: D\sinh(\gamma z).$$

(b) Mit der Linearität der Laplacegleichung erhalten wir

$$\phi(x,y,z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} C_{n,m} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right)\sinh\left(\frac{\sqrt{m^2+n^2}\pi}{a}z\right)$$

Mit der Randbedingung $\phi(x,y,a) = v(x,y)$ erhalten wir

$$\phi(x,y,a) = \sum_{n,m=1}^{\infty} C_{n,m} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right)\sinh\left(\sqrt{m^2+n^2}\pi\right) = v(x,y)$$

Die Koeffizienten werden mit Fourier-Analyse bestimmt:

$$\begin{aligned}
C_{n,m} &= \frac{4}{a^2\sinh\left(\sqrt{m^2+n^2}\pi\right)}\int_0^a dx \int_0^a dy\; v(x,y)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right) \\
&= \frac{4v_0}{a^2\sinh\left(\sqrt{m^2+n^2}\pi\right)}\int_0^a dx\ \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\int_0^a dy\ \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right)\sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right) \\
&= \frac{v_0}{\sinh\left(\sqrt{5}\pi\right)}\delta_{n2}\delta_{m1}
\end{aligned}$$

(c) Analog zu (a) und (b) sind die drei Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\vartheta(x)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\vartheta(x) &= \beta^2 + \gamma^2 =: \alpha^2 \\
\frac{1}{\Lambda(y)}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Lambda(y) &= -\beta^2 \\
\frac{1}{\Omega(z)}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Omega(z) &= -\gamma^2
\end{aligned}$$

mit Lösungen

$$\begin{aligned}
\vartheta(x) &= A\sinh\left(\frac{\sqrt{m^2+n^2}\pi}{a}x\right) \\
\Lambda(y) &= B\sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right) \\
\Omega(z) &= D\sin\left(\frac{n\pi}{a}z\right)
\end{aligned}$$

Das Potential wird dann

$$\phi(x,y,z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} C_{n,m} \sinh\left(\frac{\sqrt{m^2+n^2}\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}z\right).$$

Mit der Randbedingung $\phi(a,y,z) = u(y,z)$ erhalten wir

$$\phi(a,y,z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} C_{n,m} \sinh\left(\sqrt{m^2+n^2}\pi\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}z\right) = u(y,z)$$

Die Koeffizienten sind jetzt

$$\begin{aligned}
C_{n,m} &= \frac{4}{a^2 \sinh\left(\sqrt{m^2+n^2}\pi\right)} \int_0^a dz \int_0^a dy\ u(y,z) \sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}z\right) \\
&= \frac{4u_0}{a^2 \sinh\left(\sqrt{m^2+n^2}\pi\right)} \int_0^a dy\ y(a-y) \sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right) \int_0^a dz\ z(a-z) \sin\left(\frac{n\pi}{a}z\right).
\end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}
& \int_0^a dy\ y(a-y) \sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right) \\
&= -\frac{a}{m\pi}\left(y(a-y)\cos\left(\frac{m\pi}{a}y\right)\Big|_{y=0}^{a} - \int_0^a dy\ (a-2y)\cos\left(\frac{m\pi}{a}y\right)\right) \\
&= -\frac{a^2}{m^2\pi^2}\left((a-2y)\sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right)\Big|_{y=0}^{a} - 2\int_0^a dy\ \sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right)\right) \\
&= -\frac{2a^3}{m^3\pi^3}\cos\left(\frac{m\pi}{a}y\right)\Big|_{y=0}^{a} \\
&= \frac{4a^3}{m^3\pi^3} \text{ falls m ungerade,} \\
&= 0 \text{ falls m gerade}
\end{aligned}$$

folgt, dass

$$\begin{aligned}
C_{n,m} &= \frac{64a^4u_0}{n^3m^3\pi^6 \sinh\left(\sqrt{m^2+n^2}\pi\right)} \text{ falls m und n ungerade,} \\
&= 0 \text{ sonst.}
\end{aligned}$$

Das Gesamtpotential ist gegeben durch die Summe der Potentiale von Teilaufgabe (b) und (c).