Institut für Theoretische Physik, Universität Zürich

Lösung für Blatt 5 ,,Elektrodynamik“

Prof. Dr. T. Gehrmann Blatt 5 – FS 2013

Aufgabe 1 Stromdurchflossener Leiter

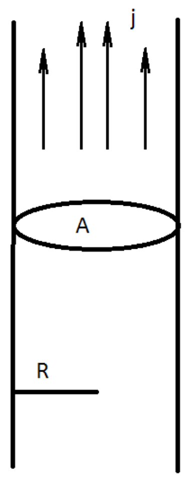


Abbildung 1: Zylindrische Leiter.

a) Gesamtstrom

$$I = \int_A \vec{A} \cdot \vec{j}$$

Parametrizierung von A:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \rho\cos\phi \\ \rho\sin\phi \\ z \end{pmatrix},$$

mit $0 \leq \rho \leq R$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, z - beliebig aber fest.

$$d\vec{A} = (\vec{r_\rho} \times \vec{r_\phi})d\rho d\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\rho\sin\phi \\ \rho\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} d\rho\, d\phi = \rho\, d\rho\, d\phi\, \vec{e_z}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R d\rho\, \rho j_0 e^{-\rho^2/R^2} = \pi j_0(-1/2R^2 e^{-\rho^2/R^2})|_0^R \\ &= -\pi j_0 R^2(1/e - 1) = \pi j_0 R^2(e-1)/e \end{aligned}$$

$$j_0 = \frac{Ie}{\pi R^2(e-1)}$$

b) Es gilt :

$$\oint_\gamma \vec{B} d\vec{r} = \mu_0 I_F = \mu_0 \iint \vec{j} d\vec{F}$$

Aus Symmetriegründen hat $\vec{B}$ nur eine ϕ-Komponente. Im Innenraum:

$$B_\phi(r) 2\pi r = \mu_0 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^r d\rho \rho j_0 e^{-\rho^2/R^2}$$

$$\begin{aligned} B_\phi(r) &= \frac{\mu_0 j_0}{r} \int_0^r d\rho \rho e^{-\rho^2/R^2} \\ &= \frac{\mu_0 j_0}{r} \left[-\frac{R^2}{2} e^{-\rho^2/R^2} \right] \Big|_0^r \\ &= \frac{\mu_0 I e}{2\pi r(e-1)} \left[1 - e^{-r^2/R^2} \right] \end{aligned}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 j_0 R^2}{2r} \left[1 - e^{-r^2/R^2} \right] \vec{e}_\phi = \frac{\mu_0 I e}{2\pi r(e-1)} \left[1 - e^{-r^2/R^2} \right] \vec{e}_\phi.$$

Es gilt im Aussenraum:

$$B_\phi(r) 2\pi r = \mu_0 I$$

$$B_\phi(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 j_0 R^2 (e-1)}{2re}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\phi = \frac{\mu_0 j_0 R^2 (e-1)}{2re} \vec{e}_\phi$$

Womit die Feldlinien immer parallel zu $\vec{e}_\phi$ sind.

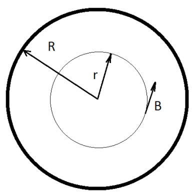
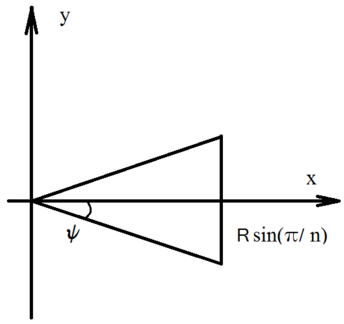


Abbildung 2: Richtung der Magnetfeld.

Aufgabe 2 Biot-Savart Gesetz

Biot-Savart Gesetz für einen dünnen Leiter:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_\gamma \frac{(\vec{r'} - \vec{r}) \times d\vec{r'}}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3}$$



a) Parametrizierung der Kannte:

$$\vec{r'}(t) = \begin{pmatrix} R\cos(\pi/n) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $-R\sin(\pi/n) \leq t \leq R\sin(\pi/n)$

Beitrag einer Kannte:

$$\begin{aligned}
\vec{B}_1(\vec{0}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-R\sin(\pi/n)}^{R\sin(\pi/n)} dt \frac{\vec{r'} \times \frac{d\vec{r'}}{dt}}{|\vec{r'}|^3} \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-R\sin(\pi/n)}^{R\sin(\pi/n)} dt \frac{\begin{pmatrix} R\cos(\pi/n) \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{|\vec{r'}|^3} \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-R\sin(\pi/n)}^{R\sin(\pi/n)} dt \frac{R\cos(\pi/n)\vec{e}_z}{\sqrt{t^2 + R^2\cos^2(\pi/n)}^3} \\
&= \frac{\mu_0 I}{2\pi} R\cos(\pi/n)\vec{e}_z \int_0^{R\sin(\pi/n)} dt \frac{1}{\sqrt{t^2 + R^2\cos^2(\pi/n)}^3} \\
&= \frac{\mu_0 I R}{2\pi} \cos(\pi/n)\vec{e}_z \frac{t}{R^2\cos^2(\pi/n)\sqrt{t^2 + \cos^2(\pi/n)R^2}}\Big|_0^{R\sin(\pi/n)} \\
&= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \vec{e}_z \frac{1}{R\cos(\pi/n)} \frac{R\sin(\pi/n)}{R} \\
&= \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \tan(\pi/n)\vec{e}_z
\end{aligned}$$

n Beiträge zusammen:

$$\vec{B}(\vec{0}) = n\frac{\mu_0 I}{2\pi R} \tan(\pi/n)\vec{e}_z$$

Das Integral ist:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}^3} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2 + a^2}}$$

b) $n \longrightarrow \infty (n = 1/\epsilon, \epsilon \longrightarrow 0)$

$$\vec{B}(\vec{0}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\frac{\tan(\pi\epsilon)}{\epsilon}\vec{e}_z \longrightarrow \frac{\mu_0 I}{2R}\vec{e}_z = \vec{B}_{Kreis}(\vec{0})$$

Aufgabe 3 Rotierende geladene Kugel

a) Stromdichte.

$$\rho_{el}(r) = \frac{Q}{4\pi R^2}\delta(r-R)$$

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \omega\, r \sin(\theta) \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{Q\omega \sin\theta r}{4\pi R^2}\delta(r-R) \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{aligned}
\vec{m} &= \frac{1}{2}\int d^3r \frac{Qw\sin\theta}{4\pi R^2}\delta(r-R)r^2 \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\frac{Qw}{4\pi}R^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin^2\theta \begin{pmatrix} -\cos\theta\cos\phi \\ -\cos\theta\sin\phi \\ \sin\theta \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4}QwR^2\vec{e}_z \int_0^{\pi} d\theta \sin^3\theta \\
&= \frac{QwR^2}{3}\vec{e}_z
\end{aligned}$$

mit:

$$\int_0^{\pi} d\theta \sin^3\theta = \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \sin^2\theta = \int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\sin^2\theta = \int_{-1}^{1} dx(1-x^2) = 2\int_0^1 dx(1-x^2) = \frac{4}{3}$$

c) Trägheitsmoment der Hohlkugel bzgl. Symmetriachse: (a: der Abstand von der Rotationsachse)

$$\begin{aligned}
\Theta &= \int dm a^2 = \int dV \rho(x^2+y^2) \\
&= \int dV \frac{M}{4\pi R^2}\delta(r-R)(x^2+y^2) \\
&= \frac{M}{4\pi R^2}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{\infty} dr r^2 \delta(r-R) r^2 \sin^2\theta \\
&= \frac{MR^2}{4\pi}2\pi\frac{4}{3} = 2/3MR^2
\end{aligned}$$

$$\vec{L} = \Theta\vec{\omega} = \frac{2}{3}\omega M R^2 \vec{e}_z$$

somit ist das gyromagnetische Verhältnis

$$g = \frac{m}{L} = \frac{Q\omega R^2}{3}\frac{3}{2\omega M R^2} = \frac{Q}{2M}$$

Aufgabe 4 Dielektrika

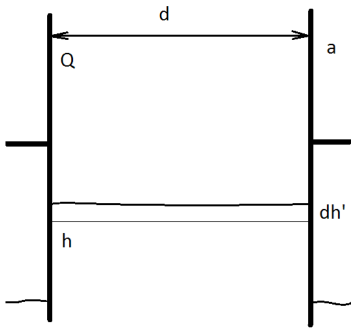


Abbildung 3: Kondensator in Dieletrika

a) C_1/C_2: Kapazitäten der Teile des Kondensators mit/ohne Dielektrikum.

$$\begin{aligned} W_{el}(h) &= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_{ges}} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_1 + C_2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\epsilon_0\epsilon_r\frac{ah}{d} + \epsilon_0\frac{a(a-h)}{d}} \\ &= \frac{d}{2\epsilon_0 a}\frac{Q^2}{(\epsilon_r - 1)h + a} \end{aligned}$$

b) Potentielle Energie eines Massenschichts mit Masse dm bei Höhe h':

$$dW_{pot} = dm\, gh' = \rho_{Fl} g\, dV\, h' = \rho_{Fl} gad\, h'\, dh'$$

$$W_{pot} = \int_0^h dW_{pot} = \frac{1}{2}\rho_{Fl} gad\, h^2$$

c)

$$W_{ges}(h) = W_{el}(h) + W_{pot}(h) = \frac{dQ^2}{2\epsilon_0 a}\frac{1}{(\epsilon_r - 1)h + a} + \frac{\rho_{Fl} gad}{2}h^2$$

Minimum:

$$W'_{ges}(h)|_{h=h_0} = 0$$

$$\frac{dQ^2}{2\epsilon_0 a}\frac{\epsilon_r - 1}{[(\epsilon_r - 1)h_0 + a]^2} = \rho_{Fl} g d a h_0$$

$$\frac{Q^2(\epsilon_r - 1)}{2g\epsilon_0\rho_{Fl}a^2} = h_0[(\epsilon_r - 1)h_0 + a]^2 \tag{1}$$

$$(\epsilon_r - 1)^2 h_0^3 + 2a(\epsilon_r - 1)h_0^2 + a^2 h_0 - \frac{Q^2(\epsilon_r - 1)}{2g\epsilon_0\rho_{Fl}a^2} = 0$$

Verwende Gl. 1 für das Zahlenbeispiel

$$Q^2 = \frac{2h_0[(\epsilon_r - 1)h_0 + a]^2 g\epsilon_0\rho_{Fl}a^2}{\epsilon_r - 1} \quad \underbrace{\Rightarrow}_{h_0=a/2} \quad Q = 6.67 \cdot 10^{-6} C$$