Institut für Theoretische Physik, Universität Zürich

Lösung für Blatt 6 „Elektrodynamik"

Prof. Dr. T. Gehrmann Blatt 6 – FS 2013

Aufgabe 1 Bewegung eines magnetischen Dipols

(a) Auf den magnetischen Dipol wirkt keine Kraft. Das Drehmoment beträgt

$$\vec{D} = \vec{m} \times \vec{B} = B_0 \begin{pmatrix} m_y \\ -m_x \\ 0 \end{pmatrix} .$$

(b) Mittels der Gleichung für das gyromagnetische Verhältnis folgt

$$\vec{D} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\gamma}\frac{\mathrm{d}\vec{m}}{\mathrm{d}t} ,$$

und damit

$$\frac{\mathrm{d}\vec{m}}{\mathrm{d}t} = \gamma\,\vec{m} \times \vec{B} .$$

Das Analogon zu diesem Ausdruck aus der Mechanik ist die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{L} \times \vec{\omega}_{KS} ,$$

die einen Kreisel mit Drehimpuls $\vec{L}$ und Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_{KS}$ (bezüglich des Hauptachsensystems) beschreibt. Auf den Kreisel wirken keine äusseren Drehmomente.

(c) Wir müssen die drei Differentialgleichungen

$$\dot{m}_x = \gamma B_0 m_y \tag{1}$$
$$\dot{m}_y = -\gamma B_0 m_x \tag{2}$$
$$\dot{m}_z = 0 , \tag{3}$$

mit den folgenden Anfangsbedingungen

$$m_x(t=0) = M_0 \tag{4}$$
$$m_y(t=0) = 0 \tag{5}$$
$$m_z(t=0) = M_z \tag{6}$$

lösen. Die Lösung von (3) ist $m_z(t) = M_z$. Setzten wir $\eta(t) := m_x(t) + i m_y(t)$, erhalten wir aus (1) und (2) die DGL

$$\dot{\eta} = -i\gamma B_0 \eta .$$

Deren allgemeine Lösung ist

$$\eta(t) = c \cdot e^{-i\gamma B_0 t} \ ,$$

wobei die Konstante c mit der Anfangsbedingung

$$\eta(0) = m_x(0) + i m_y(0) = M_0$$

zu $c = M_0$ bestimmt wird. Damit folgt, dass

$$\begin{aligned} m_x(t) &= \mathrm{Re}[\eta(t)] = M_0 \cos(\gamma B_0 t) \\ m_y(t) &= \mathrm{Im}[\eta(t)] = -M_0 \sin(\gamma B_0 t) \ , \end{aligned}$$

also insgesamt

$$\vec{m}(t) = \begin{pmatrix} M_0 \cos(\gamma B_0 t) \\ -M_0 \sin(\gamma B_0 t) \\ M_z \end{pmatrix} \ .$$

Bemerkungen: Diese Formel beschreibt eine Präzessionsbewegung. Insbesondere unterliegt ihr auch die Magnetnadel eines Kompasses. Die Grösse γB_0 wird als Larmorfrequenz bezeichnet.

Aufgabe 2 Quadratische Leiterschleife: Vektorpotential und Magnetfeld

(a) Der Weg γ entlang der Leitschleife setzt sich zusammen aus den vier Teilstücken

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 \ ,$$

wobei γ_1 durch

$$\vec{\gamma}_1(t) = \frac{a}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \qquad 0 \leq t \leq a \ ,$$

parametrisiert werden kann; und die restlichen Teilstücke durch

$$\vec{\gamma}_2(t) = \frac{a}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \qquad 0 \leq t \leq a \ ,$$

bzw.

$$\vec{\gamma}_3(t) = -\frac{a}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \qquad 0 \leq t \leq a \ ,$$

und

$$\vec{\gamma}_4(t) = \frac{a}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \qquad 0 \leq t \leq a \ .$$

Setze nun

$$\vec{A}_i(\vec{r}) := \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\gamma_i} \frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \ .$$

Mit $\frac{\mathrm{d}\vec{\gamma}_1'}{\mathrm{d}t} = -\vec{e}_x$ folgt dann für das erste Teilstück

$$\begin{aligned}
\vec{A}_1(\vec{r}) &:= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^a \mathrm{d}t \frac{\mathrm{d}\vec{\gamma}_1/\mathrm{d}t}{\sqrt{(x - \frac{a}{2} + t)^2 + (y - \frac{a}{2})^2 + z^2}} \\
&= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{e}_x \int_0^a \mathrm{d}t \frac{1}{\sqrt{(x - \frac{a}{2} + t)^2 + (y - \frac{a}{2})^2 + z^2}} \\
&= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{e}_x \left[\operatorname{arsinh}\left(\frac{x + \frac{a}{2}}{\sqrt{(y - \frac{a}{2})^2 + z^2}} \right) - \operatorname{arsinh}\left(\frac{x - \frac{a}{2}}{\sqrt{(y - \frac{a}{2})^2 + z^2}} \right) \right] \ .
\end{aligned}$$

Ganz analog erhalten wir Ausdrücke für die restlichen A_i

$$\begin{aligned}
\vec{A}_2(\vec{r}) &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{e}_y \left[\operatorname{arsinh}\left(\frac{y + \frac{a}{2}}{\sqrt{(x + \frac{a}{2})^2 + z^2}} \right) - \operatorname{arsinh}\left(\frac{y - \frac{a}{2}}{\sqrt{(x + \frac{a}{2})^2 + z^2}} \right) \right] \ , \\
\vec{A}_3(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{e}_x \left[\operatorname{arsinh}\left(\frac{x + \frac{a}{2}}{\sqrt{(y + \frac{a}{2})^2 + z^2}} \right) - \operatorname{arsinh}\left(\frac{x - \frac{a}{2}}{\sqrt{(y + \frac{a}{2})^2 + z^2}} \right) \right] \ , \\
\vec{A}_4(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{e}_y \left[\operatorname{arsinh}\left(\frac{y + \frac{a}{2}}{\sqrt{(x - \frac{a}{2})^2 + z^2}} \right) - \operatorname{arsinh}\left(\frac{y - \frac{a}{2}}{\sqrt{(x - \frac{a}{2})^2 + z^2}} \right) \right] \ .
\end{aligned}$$

Das gesamte Vektorpotential $\vec{A}$ ist dann gegeben durch

$$\vec{A}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{4} \vec{A}_i(\vec{r}) \ .$$

(b) Das Magnetfeld $\vec{B}$ der Leiterschleife ist gegeben durch

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{rot}\left(\sum_{i=1}^{4} \vec{A}_i \right) = \sum_{i=1}^{4} \operatorname{rot} \vec{A}_i = \sum_{i=1}^{4} \vec{B}_i \ ,$$

wobei wir im letzten Schritt die Definition $\vec{B}_i := \operatorname{rot} \vec{A}_i$ benutzt haben. Da $A_i^z = 0$ für alle i, gilt

$$\vec{B}_i = \begin{pmatrix} -\partial_z A_i^y \\ \partial_z A_i^x \\ \partial_x A_i^y - \partial_y A_i^x \end{pmatrix} \ .$$

Für $i = 1$ folgt wegen $A_1^y = 0$ weiter, dass

$$\vec{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_z A_1^x \\ -\partial_y A_1^x \end{pmatrix} \ ,$$

Eine kurze Rechnung liefert schliesslich

$$\partial_z A_1^x = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{1+\frac{(x+\frac{a}{2})^2}{(y-\frac{a}{2})^2+z^2}}}\frac{x+\frac{a}{2}}{\sqrt{(y-\frac{a}{2})^2+z^2}^3}z - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{(x-\frac{a}{2})^2}{(y-\frac{a}{2})^2+z^2}}}\frac{x-\frac{a}{2}}{\sqrt{(y-\frac{a}{2})^2+z^2}^3}z\right]$$
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{z}{(y-\frac{a}{2})^2+z^2}\left[\frac{x+\frac{a}{2}}{\sqrt{(x+\frac{a}{2})^2+(y-\frac{a}{2})^2+z^2}} - \frac{x-\frac{a}{2}}{\sqrt{(x-\frac{a}{2})^2+(y-\frac{a}{2})^2+z^2}}\right],$$

sowie

$$\partial_y A_1^x = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{y-\frac{a}{2}}{(y-\frac{a}{2})^2+z^2}\left[\frac{x+\frac{a}{2}}{\sqrt{(x+\frac{a}{2})^2+(y-\frac{a}{2})^2+z^2}} - \frac{x-\frac{a}{2}}{\sqrt{(x-\frac{a}{2})^2+(y-\frac{a}{2})^2+z^2}}\right].$$

Somit gilt also

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi[(y-\frac{a}{2})^2+z^2]}\left[\frac{x+\frac{a}{2}}{\sqrt{(x+\frac{a}{2})^2+(y-\frac{a}{2})^2+z^2}} - \frac{x-\frac{a}{2}}{\sqrt{(x-\frac{a}{2})^2+(y-\frac{a}{2})^2+z^2}}\right]\begin{pmatrix}0\\-z\\y-a/2\end{pmatrix}.$$

Für die restlichen B_i erhalten wir ganz analog

$$\vec{B}_2(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi[(x+\frac{a}{2})^2+z^2]}\left[\frac{y+\frac{a}{2}}{\sqrt{(x+\frac{a}{2})^2+(y+\frac{a}{2})^2+z^2}} - \frac{y-\frac{a}{2}}{\sqrt{(x+\frac{a}{2})^2+(y-\frac{a}{2})^2+z^2}}\right]\begin{pmatrix}-z\\0\\x+a/2\end{pmatrix}$$
$$\vec{B}_3(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi[(y+\frac{a}{2})^2+z^2]}\left[\frac{x+\frac{a}{2}}{\sqrt{(x+\frac{a}{2})^2+(y+\frac{a}{2})^2+z^2}} - \frac{x-\frac{a}{2}}{\sqrt{(x-\frac{a}{2})^2+(y+\frac{a}{2})^2+z^2}}\right]\begin{pmatrix}0\\-z\\y+a/2\end{pmatrix}$$
$$\vec{B}_4(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi[(x-\frac{a}{2})^2+z^2]}\left[\frac{y+\frac{a}{2}}{\sqrt{(x-\frac{a}{2})^2+(y+\frac{a}{2})^2+z^2}} - \frac{y-\frac{a}{2}}{\sqrt{(x-\frac{a}{2})^2+(y-\frac{a}{2})^2+z^2}}\right]\begin{pmatrix}-z\\0\\x-a/2\end{pmatrix}.$$

(c) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass für eine lokalisierte, statische Stromverteilung der dominierende Beitrag zur Multipolentwicklung im Fernfeld der Dipolbeitrag

$$\vec{A}_D = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \tag{7}$$

ist, wobei $\vec{m}$ das magnetische Dipolmoment der Stromverteilung mit

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int d^3r'\big[\vec{r}'\times\vec{j}(\vec{r}')\big]. \tag{8}$$

Um diesen Ausdruck zu berechnen, teilen wir unsere Stromverteilung wie oben in vier Teile, sodass $\vec{j} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2 + \vec{j}_3 + \vec{j}_4$. Diese Teilstromdichten lassen sich ausdrücken als

$$\begin{aligned}\vec{j}_1(\vec{r}) &= -I\delta(z)\delta(y-a/2)\theta(a/2-|x|)\vec{e}_x\\ \vec{j}_2(\vec{r}) &= -I\delta(z)\delta(x+a/2)\theta(a/2-|y|)\vec{e}_y\\ \vec{j}_3(\vec{r}) &= +I\delta(z)\delta(y+a/2)\theta(a/2-|x|)\vec{e}_x\\ \vec{j}_4(\vec{r}) &= +I\delta(z)\delta(x-a/2)\theta(a/2-|y|)\vec{e}_y\end{aligned} \tag{9}$$

Wir berechnen nun

$$\vec{m}_1 = \frac{1}{2}\int d^3r' \big[\vec{r'} \times \vec{j}_1(\vec{r'})\big] = \frac{1}{2}\int_{-a/2}^{a/2} dx' \Big[\begin{pmatrix} x' \\ a/2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -I \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Big] = \frac{Ia^2}{4}\vec{e}_z \tag{10}$$

Die anderen Teilstromdichten liefern denselben Beitrag und wir finden das magnetische Dipolmoment $\vec{m} = Ia^2\vec{e}_z$.

Aufgabe 3 Homogen magnetisierte Kugel

Gegeben ist die Magnetisierung $\vec{M} = M_0\vec{e}_z$ im Innern der Kugel.

(a) Gemäss Definition gilt $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ und somit erfüllt $\vec{H}$ die Gleichungen

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}) = \vec{j}_F(\vec{r}) = 0, \tag{11}$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M}(\vec{r}), \tag{12}$$

welche direkt aus den Maxwellgleichungen an $\vec{B}$ folgen. Aus Gl. (11) folgern wir, dass $\vec{H}$ in Abwesenheit freier Ströme ein reines Gradientenfeld ist und somit geschrieben werden kann als

$$\vec{H}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\varphi_m(\vec{r}). \tag{13}$$

Einsetzen in Gl. (12) liefert eine 'magnetische Poissongleichung'

$$\Delta\varphi_m(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{M}(\vec{r}). \tag{14}$$

In Analogie zur Elektrostatik folgt

$$\begin{aligned}\varphi_m(\vec{r}) &= -\frac{1}{4\pi}\int d^3r' \frac{\vec{\nabla}_{r'} \cdot \vec{M}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \\ &= -\frac{1}{4\pi}\int d^3r' \Big(\vec{\nabla}_{r'} \cdot \frac{\vec{M}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} - \vec{M}(\vec{r}\,') \cdot \vec{\nabla}_{r'}\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\Big)\end{aligned} \tag{15}$$

Mithilfe des Gauss'schen Satzes verschwindet der erste Term und für den zweiten Term benutzen wir $\vec{\nabla}_{r'}1/|\vec{r} - \vec{r'}| = -\vec{\nabla}_r 1/|\vec{r} - \vec{r'}|$, so dass folgt

$$\varphi_m(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}_r \cdot \int d^3r' \frac{\vec{M}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \tag{16}$$

Alternative Lösung: Das Vektorpotential $\vec{A}$ einer Magnetisierungsverteilung $\vec{M}(\vec{r'})$ folgt direkt aus dem Vektorpotential eines Dipols als

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \frac{\vec{M}(\vec{r}\,') \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \vec{M}(\vec{r}\,') \times (-\vec{\nabla}_r)\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \\ &= \vec{\nabla}_r \times \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \frac{\vec{M}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\end{aligned} \tag{17}$$

Mithilfe von $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \Delta\vec{v}$ finden wir

$$\begin{aligned}
\vec{B}(\vec{r}) &= \vec{\nabla}_r \times \vec{\nabla}_r \times \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla}_r \left(\vec{\nabla}_r \cdot \int d^3r' \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) - \frac{\mu_0}{4\pi} \Delta_r \int d^3r' \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\
&= \mu_0(-\vec{\nabla}_r \varphi_m(\vec{r})) + \mu_0 \vec{M}(\vec{r}), \qquad (18)
\end{aligned}$$

wobei wir $\Delta 1/|\vec{r} - \vec{r}'| = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')$ benutzt und die Definition des skalaren magnetischen Potentials verwendet haben. Gemäss Definition gilt

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0(\vec{H}(\vec{r}) + \vec{M}(\vec{r})) \qquad (19)$$

und somit folgt

$$\vec{H}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}_r \varphi_m(\vec{r}) \qquad (20)$$

(b) Wie auf dem Aufgabenblatt gegeben, berechnet man das skalare Potential mittels der Formel

$$\begin{aligned}
\varphi_m(\vec{r}) &= -\frac{1}{4\pi} \operatorname{div}_r \int d^3r' \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\
&= -\frac{M_0}{4\pi} \operatorname{div}_r \int d^3r' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{e}_z \\
&= -\frac{M_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{-1}^{1} dx \int_0^R dr' r'^2 \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'x}} \\
&= \frac{M_0}{2} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^R dr' r'^2 \frac{1}{rr'} \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'x} \Big|_{-1}^{1} \\
&= \frac{M_0}{2} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^R dr' \frac{r'}{r} \Big[|r - r'| - (r + r') \Big] \\
&= \frac{M_0}{2} \frac{\partial}{\partial z} \begin{cases} \int_0^r dr' \frac{r'}{r}(-2r') + \int_r^R dr' \frac{r'}{r}(-2r) \ , & \text{falls } r < R, \\ \int_0^R dr' \frac{r'}{r}(-2r') \ , & \text{falls } r \geq R \end{cases} \\
&= -M_0 \frac{\partial}{\partial z} \begin{cases} \frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{6}r^2 \ , & \text{falls } r < R, \\ \frac{1}{3}\frac{R^3}{r} \ , & \text{falls } r \geq R. \end{cases}
\end{aligned}$$

Nun benutzen wir, dass

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} r^2 &= \frac{dr^2}{dr} \frac{\partial r}{\partial z} = 2r\frac{z}{r} = 2z = 2r\cos\theta \ , \\
\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} &= -\frac{1}{r^2} \frac{z}{r} = -\frac{z}{r^3} = -\frac{\cos\theta}{r^2} \ .
\end{aligned}$$

Setzen wir dies oben ein, ergibt sich

$$\varphi_m(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{3} M_0 r \cos\theta \ , & \text{falls } r < R, \\ \frac{1}{3} M_0 R^3 \frac{\cos\theta}{r^2} \ , & \text{falls } r \geq R. \end{cases}$$

(c) Das gesamte magnetische Moment der Kugel berechnet sich zu

$$\vec{m}_{ges} = \int d^3r\, \vec{M} = \frac{4\pi}{3} R^3 M_0 \vec{e}_z \ ,$$

da die Magnetisierung im Innern der Kugel homogen ist. Auflösen nach $\vec{M}$ ergibt $\vec{M} = M_0\vec{e}_z = \frac{3\vec{m}_{ges}}{4\pi R^3}$, und man erhält für das skalare Potential

$$\varphi_m(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\vec{m}_{ges}\cdot\vec{r}}{4\pi R^3} \ , & \text{falls } r < R, \\ \frac{\vec{m}_{ges}\cdot\vec{r}}{4\pi r^3} \ , & \text{falls } r \geq R. \end{cases}$$

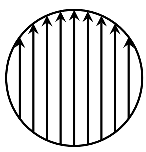
Wir sehen, dass das Potential im Innenraum das eines homogenen Feldes ist, während es im Aussenraum exakt dem eines magnetischen Dipols entspricht.

(d)

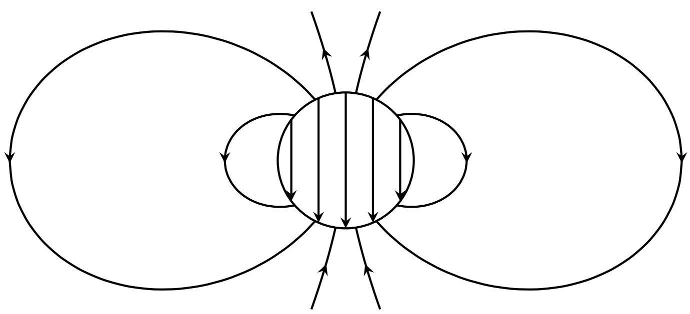
$$\vec{H} = -\vec{\nabla}\varphi_m = \begin{cases} -\frac{1}{3}\vec{M} = -\frac{\vec{m}_{ges}}{4\pi R^3} \ , & \text{falls } r < R \text{ (homogenes Feld)}, \\ \frac{3(\vec{m}_{ges}\cdot\vec{r})\vec{r} - \vec{m}_{ges}r^2}{4\pi r^5} \ , & \text{falls } r \geq R \text{ (Dipolfeld)}, \end{cases}$$

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \begin{cases} \frac{2}{3}\mu_0\vec{M} = \mu_0\frac{\vec{m}_{ges}}{2\pi R^3} \ , & \text{falls } r < R \text{ (homogenes Feld)}, \\ \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\vec{m}_{ges}\cdot\vec{r})\vec{r} - \vec{m}_{ges}r^2}{4\pi r^5} \ , & \text{falls } r \geq R \text{ (Dipolfeld)}, \end{cases}$$

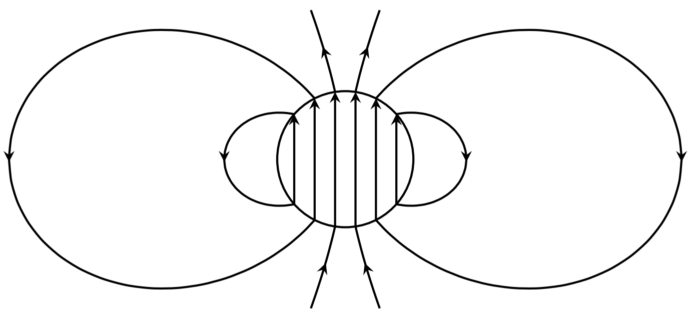
wobei wir in der letzten Gleichung benutzt haben, dass $\vec{M}$ im Aussenraum verschwindet.



Feldlinien von $\vec{M}$ enden an der Kugeloberfläche.



Feldlinien von $\vec{H}$ beginnen und enden an der Kugeloberfläche.



Feldlinien von $\vec{B}$ sind geschlossen wegen $\mathrm{div}\vec{B} = 0$. Im Aussenraum ist $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$.

Sowohl $\vec{H}$ als auch $\vec{B}$ sind im Aussenraum ein exaktes Dipolfeld und im Innern homogen, wobei sie im Innenraum antiparallel zueinander sind. Im Aussenraum hingegen sind sie parallel mit $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$.