

Lösung für Blatt 7 „Elektrodynamik“

Aufgabe 1 Induktion im Magnetfeld

Nach dem Faraday'schen Induktionsgesetz induziert die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses durch die Leiterschleife eine Spannung in derselben gemäss

$$U = -\dot{\Phi} .$$

Der Fluss ist das Produkt aus dem Betrag des magnetischen Feldes B und der Projektion der Fläche innerhalb der Leiterschleife auf die x - y -Ebene:

$$\Phi = B\pi R^2 \sin \vartheta \cos(\omega t) ,$$

und somit

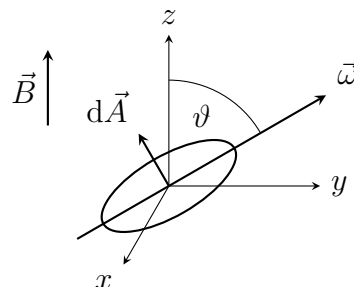
$$U = -\dot{\Phi} = \pi R^2 B \omega \sin \vartheta \sin(\omega t) . \quad (1)$$

Etwas ausführlicher: Legen wir das Koordinatensystem so, dass $\vec{\omega}$ in der y - z -Ebene liegt (siehe Skizze):

$$\vec{\omega} = \omega \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} .$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \Phi &= \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = B \int \vec{e}_z \cdot d\vec{A} \\ &= B \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho \rho \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ -\cos(\omega t) \cos \vartheta \\ \cos(\omega t) \sin \vartheta \end{pmatrix} \\ &= B\pi R^2 \sin \vartheta \cos(\omega t) \end{aligned}$$



wie oben, was auf (1) führt.

Aufgabe 2 Magnetfeld im Plattenkondensator

Da wir Randeffekte vernachlässigen, nehmen wir an, dass das elektrische Feld am Punkt P zwischen den Platten

$$\vec{E}(P) = \frac{Q}{\epsilon_0 \pi b^2} \theta (b-a) \vec{e}_z \quad (2)$$

beträgt, wobei Q die auf den Platten induzierte Ladung und a der Abstand zwischen P und der Symmetrieachse ist. Mit $I = \dot{Q}$ folgt daraus, dass

$$\dot{\vec{E}}(P) = \frac{I}{\epsilon_0 \pi b^2} \theta (b-a) \vec{e}_z . \quad (3)$$

Nb: In dieser Aufgabe wählen wir die z -Achse entlang der Rotationsachse des Plattenkondensators.

- a) Da die Stromdichte $\vec{j}(\vec{x}, t)$ zwischen den Platten verschwindet, gilt dort (2. Maxwell-Gleichung)

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \dot{\vec{E}} = \epsilon_0 \mu_0 \dot{\vec{E}}, \quad (4)$$

bzw. (Integralform der 2. Maxwell-Gleichung)

$$\oint_{\partial F} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \epsilon_0 \mu_0 \int_F \dot{\vec{E}} \cdot d\vec{\sigma}, \quad (5)$$

wobei F eine beliebige Fläche zwischen den Platten bezeichnet.

Wir sehen, dass Gleichung (4) formal dem Ampère'schen Gesetz $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ aus der Magnetostatik entspricht, wenn man \vec{j} durch $\epsilon_0 \dot{\vec{E}}$ ersetzt. Folglich ist die Lösung analog zum Biot-Savart-Gesetz:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\epsilon_0 \mu_0}{4\pi} \int d^3x' \dot{\vec{E}}(\vec{x}') \wedge \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}. \quad (6)$$

Zusammen mit (3) sehen wir daran, dass die Komponente B_z entlang der Symmetrieachse des Kondensators verschwindet. Alternativ kann man dies auch sehen, indem man rot auf Gleichung (4) anwendet. Da $\text{rot rot } \vec{B} = \text{grad}(\text{div } \vec{B}) - \Delta \vec{B}$ und $\text{div } \vec{B} = 0$, folgt dann

$$\Delta B_z = (\Delta \vec{B})_z = -\epsilon_0 \mu_0 (\text{rot } \dot{\vec{E}})_z = 0,$$

da $\dot{\vec{E}}$ parallel zur z -Achse ist und die Rotation eines Vektorfeldes immer senkrecht auf demselben steht. Da wir verlangen, dass B_z im Unendlichen verschwindet, folgt $B_z = 0$.

Anstatt (6) direkt auszurechnen, ist es geschickter, zunächst noch die Rotations-symmetrie der Anordnung zu benutzen. So folgt aus der 3. Maxwell-Gleichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0,$$

bzw. deren Integralform

$$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{\sigma} = 0,$$

dass auch die Radialkomponente des \vec{B} -Feldes bezüglich der z -Achse verschwindet. Dies sieht man, indem man V als Zylinder entlang der Symmetrieachse wählt und $B_z = 0$ benutzt.

Wählen wir nun F als die Kreisscheibe mit Mittelpunkt auf der z -Achse und Radius a , die durch P geht, erhalten wir somit aus (5) für den Betrag B des Magnetfeldes am Punkt P

$$B \oint_{\partial F} ds = \epsilon_0 \mu_0 \int_F \dot{\vec{E}} \cdot d\vec{\sigma} = 2\pi \epsilon_0 \mu_0 \dot{E} \int_0^a \theta(b-r) r dr.$$

Es folgt

$$2\pi a B = \epsilon_0 \mu_0 \dot{E} \cdot \begin{cases} \pi a^2, & a \leq b \\ \pi b^2, & a > b, \end{cases}$$

und somit (zusammen mit (3))

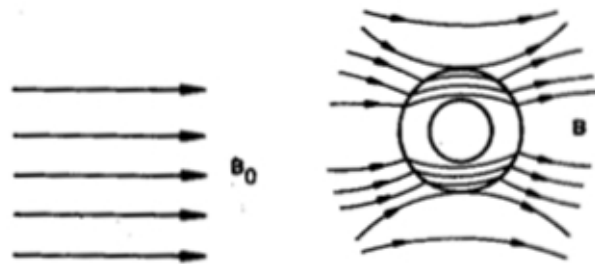
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} I \vec{e}_\varphi \cdot \begin{cases} a/b^2, & a \leq b \\ 1/a, & a > b. \end{cases} \quad (7)$$

b) Da für diese Werte $a < b$ ist, folgt aus (7), dass

$$I = \frac{2\pi b^2}{\mu_0 a} B = 80 \text{ A} .$$

Aufgabe 3 Eisenrohr im Magnetfeld

- (a) Bevor das Rohr im Magnetfeld plaziert wird, ist letzteres homogen. Die Feldlinien sehen aus wie in der linken Abbildung. Die Anwesenheit des Zylinders verzerrt die Feldlinien, wie in der rechten Abbildung zu sehen ist. Da Eisen als Ferromagnet ($\mu_r \gg 1$) das Feld in seinem Innern verstärkt, werden die Feldlinien zum Eisenzylinder hingekrümmt. Desgleichen für einen Paramagneten ($\mu_r > 1$). Bei einem diamagnetischen Medium ($\mu_r < 1$) wären die Feldlinien vom Zylinder weggekrümmt, während die Feldlinien im Falle eines Supraleiters ($\mu_r = 0$) diesen sogar vollständig umfließen und nicht in ihn eindringen würden.



- (b) Da es keine freien Ströme gibt, ist \vec{H} rotationsfrei. Somit können wir ein skalares Potential ϕ einführen, das $\vec{H} = -\vec{\nabla}\phi$ erfüllt. Wegen $\vec{B} = \mu\vec{H}$ mit $\mu = \mu_0\mu_r$ gilt für ϕ die Laplace-Gleichung $\Delta\phi = 0$. In Zylinderkoordinaten (r, θ, z) wird diese zu

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} \phi = 0 .$$

Dabei wählen wir z entlang der Zylinderachse und $x = r \cos \theta$ entlang des ursprünglichen Feldes $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_x$. Wegen der Translationsymmetrie entlang des Zylinders ist $\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$. Demnach können wir einen Separationsansatz

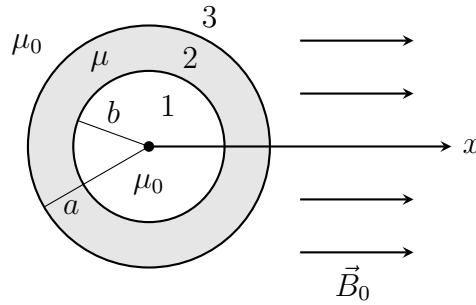
$$\phi(r, \theta) = R(r)S(\theta)$$

machen und erhalten

$$\frac{1}{R} \left(r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} \right) = -\frac{1}{S} \frac{d^2 S}{d\theta^2} = \text{const.} =: m^2,$$

da der erste Ausdruck nicht von θ abhängt und der zweite nicht von r . Die Gleichung für R ist eine Euler'sche Differentialgleichung mit allgemeiner Lösung $R_m(r) = c_m r^m + d_m r^{-m}$, während die Gleichung für S harmonisch ist mit der Lösung $S_m(\theta) = g_m \cos(m\theta) + h_m \sin(m\theta)$. Wegen der Periodizität $\phi(r, \theta + 2\pi) = \phi(r, \theta)$ kann m nur ganzzahlige Werte annehmen, und die Spiegelsymmetrie $\phi(r, -\theta) = \phi(r, \theta)$ bestimmt ferner $h_m = 0$ für alle m . Somit hat in jedem der drei Bereiche aus untenstehender Abbildung das Potential die Form

$$\phi_i = \sum_{m=1}^{\infty} (c_{im} r^m + d_{im} r^{-m}) \cos(m\theta) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (8)$$



Weit entfernt vom Zylinder ist $\vec{\nabla}\phi_3 = -\vec{H}_0$ oder $\phi_3 = -H_0 x = -\frac{B_0}{\mu_0} r \cos\theta$. Vergleicht man dies mit (8), erhält man für die Koeffizienten

$$c_{31} = -\frac{B_0}{\mu_0}, \quad c_{3m} = 0 \quad (m \neq 1). \quad (9)$$

Ausserdem muss ϕ_1 für $r \rightarrow 0$ endlich sein. Folglich ist $d_{1m} = 0$ für alle m . Nun können wir die Randbedingungen in $r = a$ und b betrachten. Es gilt

$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \Big|_{r=b} &= \mu \frac{\partial \phi_2}{\partial r} \Big|_{r=b}, & \mu \frac{\partial \phi_2}{\partial r} \Big|_{r=a} &= \mu_0 \frac{\partial \phi_3}{\partial r} \Big|_{r=a}, \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \Big|_{r=b} &= \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} \Big|_{r=b}, & \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} \Big|_{r=a} &= \frac{\partial \phi_3}{\partial \theta} \Big|_{r=a}. \end{aligned}$$

Setzt man (8) ein, ergibt dies

$$\begin{aligned} (\mu_0 c_{1m} - \mu c_{2m}) b^{2m} + \mu d_{2m} &= 0, & (\mu c_{2m} - \mu_0 c_{3m}) a^{2m} - (\mu d_{2m} - \mu_0 d_{3m}) &= 0, \\ (c_{1m} - c_{2m}) b^{2m} - d_{2m} &= 0, & (c_{2m} - c_{3m}) a^{2m} + (d_{2m} - d_{3m}) &= 0. \end{aligned}$$

Löst man die beiden Gleichungen auf der linken Seite nach c_{2m} und d_{2m} auf, ergibt sich

$$c_{2m} = \frac{\mu + \mu_0}{2\mu} c_{1m}, \quad d_{2m} = b^{2m} \frac{\mu - \mu_0}{2\mu} c_{1m}. \quad (10)$$

Dies kann man nun wiederum in die Gleichungen auf der rechten Seite einsetzen und d_{3m} eliminieren und erhält so

$$c_{1m} = \frac{4\mu\mu_0 a^{2m}}{a^{2m}(\mu + \mu_0)^2 - b^{2m}(\mu - \mu_0)^2} c_{3m}.$$

Wegen (9) folgt daraus $c_{1m} = 0$ für $m \neq 1$ und

$$c_{11} = \frac{4\mu a^2 B_0}{b^2(\mu - \mu_0)^2 - a^2(\mu + \mu_0)^2} ,$$

sowie für das Potential

$$\phi_1 = c_{11} r \cos \theta .$$

Dadurch ergibt sich für das Magnetfeld im Hohlraum

$$\begin{aligned} \vec{B}_1 &= -\mu_0 \vec{\nabla} \phi_1 = -\mu_0 \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{\mu_0}{r} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \\ &= -\mu_0 c_{11} (\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta) \\ &= -\mu_0 c_{11} \vec{e}_x \\ &= \frac{4\mu\mu_0 a^2}{a^2(\mu + \mu_0)^2 - b^2(\mu - \mu_0)^2} \vec{B}_0 . \end{aligned}$$

Für einen Ferromagneten wie Eisen ist $\mu \gg \mu_0$, und daher gilt zu führender Ordnung in μ_0/μ

$$\vec{B}_1 = \frac{4\mu_0}{\mu} \frac{\vec{B}_0}{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} .$$

Aufgabe 4 Rotierender Leiter im Dipolfeld

Das magnetische Moment $\vec{M} = M\vec{e}_z$ führt am Ort \vec{r} zu folgendem Magnetfeld:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\vec{M} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{M}}{r^3} \right] .$$

Betrachte nun einen beliebigen Punkt P' auf der Schleife zwischen P und C . Weiter sei R der Radius der Leiterschleife und θ der Winkel $\sphericalangle POP'$ (wie in der Skizze auf dem Aufgabenblatt). Die Geschwindigkeit von P' ist dann gegeben durch

$$\vec{v} = \omega R \sin \theta \vec{e}_\varphi .$$

Mit Hilfe der Identitäten $\vec{e}_z = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_r = \vec{e}_\theta$, sowie $\vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_\theta = -\vec{e}_r$ folgt dann für einen beliebigen Ortsvektor \vec{r}' mit $|\vec{r}'| = R$ sofort auch

$$\vec{v} \wedge \vec{B}(\vec{r}') = \frac{\mu_0 \omega R M \sin \theta}{4\pi R^3} (2 \cos \theta \vec{e}_\theta - \sin \theta \vec{e}_r) .$$

Nach dieser Vorarbeit ist es nun nicht mehr schwierig, die induzierte Spannung zwischen P und C zu berechnen:

$$U_{PC} = \int_P^C (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 M \omega}{4\pi R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 M \omega}{4\pi R} .$$

Dabei haben wir benutzt, dass $d\vec{l} = R d\theta \vec{e}_\theta$.