Institut für Theoretische Physik, Universität Zürich

Lösung für Blatt 8 „Elektrodynamik"

Prof. Dr. T. Gehrmann Blatt 8 – FS 2013

Aufgabe 1 Gleitender Kupferstab

Lassen Sie uns aus zu beginnen mit:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial F} \vec{E} \cdot d\vec{l} &= -\frac{d}{dt} \int_F \vec{B} \cdot d\vec{A} \\ &= U_{ind} = -\frac{d}{dt}\varphi_m \ . \end{aligned} \tag{1}$$

In dieser Gleichung, φ_m ist der magnetische Fluss durch F, während U_{ind} ist die induktive Elektromotorische Kraft ($\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$).

(a) Hier: $\varphi_m = \vec{B} \cdot \vec{A}$,

$$\rightarrow \quad \frac{d}{dt}\varphi_m = \vec{B} \cdot \dot{\vec{A}} = Blv = -U_{ind}. \tag{2}$$

Und dann:

$$I_{ind} = \frac{U_{ind}}{R} = -\frac{Blv}{R} \ . \tag{3}$$

Folgt daraus auch:

$$\begin{aligned} \vec{F}(t) &= I \int_{\text{Stab}} d\vec{r} \times \vec{B}(\vec{r}) = -I \int_0^L \vec{dl} \times \vec{B} = \\ &= I \int_0^L \vec{B} \times \vec{dl} = IlB\vec{e}_y \ , \end{aligned} \tag{4}$$

da der Strom im Gegenuhrzeigersinn definiert ist (durchweg, ist I_{ind} negativ). Aus $\vec{F}(t) = m\frac{d}{dt}\vec{v}(t)$, und $I = I_{ind}$, folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v(t) &= \frac{I_{ind}lB}{m} = -\frac{B^2 l^2 v(t)}{mR} \\ \rightarrow \quad \ln\left[\frac{v(t)}{v_0}\right] &= -\frac{B^2 l^2}{mR}(t - t_0) \\ \rightarrow \quad v(t) &= v_0 \exp\left[-\frac{B^2 l^2}{mR}t\right] = v_0 \exp\left[-\frac{\sigma_0}{\rho_m}B^2 t\right], \end{aligned} \tag{5}$$

mit $\sigma_0 = \frac{l}{AR}$ und die Dichte $\rho_m = \frac{m}{V} = \frac{m}{lA}$.

(b) Charakteristische Zeit gegeben durch $\tau = \frac{\rho_m}{\sigma_0 B^2}\Big|_{B=10^{-4}T} \approx 1.5 \cdot 10^4\,\text{s} \approx 4\,\text{hours}$.

(c) Mit $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$,

$$\frac{dE_{kin}}{dV} = \frac{1}{2}\rho_m v^2 \ . \tag{6}$$

Und dann:

$$\frac{d}{dt}\frac{dE_{kin}}{dV} = \rho_m\, v\frac{d}{dt}v = -\sigma_0 B^2 v^2 \text{ und} \tag{7}$$

die Wärmeleistung ist $P = UI = RI^2$, und somit

$$\frac{dP}{dV} = \frac{RI^2}{Al} = \frac{lB^2}{RA}v^2 = \sigma_0 B^2 v^2 \ \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{dE_{kin}}{dV} = -\frac{dP}{dV} \ . \tag{8}$$

Aufgabe 2 Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld

Die Lagrangefunktion eines (nicht-relativistischen) Teilchens mit Ladung e im elektromagnetischen Feld ist gegeben durch

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \frac{1}{2}m\,\dot{\vec{x}}^2 + e\,\dot{\vec{x}}\cdot\vec{A}(\vec{x}, t) - e\,\varphi(\vec{x}, t)\,, \tag{9}$$

wobei $\vec{x}$ der Ort und m die Masse des Teilchens ist.

(a)

$$\vec{p} = \frac{\partial\mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)}{\partial\dot{\vec{x}}} = m\,\dot{\vec{x}} + e\vec{A}\,(\vec{x}, t) \tag{10}$$

wobei $m\dot{\vec{x}}$ der kinetische Impuls und $e\vec{A}$ der elektromagnetische Impuls ist. Die Hamiltonian von Legendre-Transformation ist:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\vec{x}, \vec{p}, t) &= \vec{p}\cdot\dot{\vec{x}} - \mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)\\ &= \vec{p}\cdot\dot{\vec{x}} - \frac{1}{2}m\,\dot{\vec{x}}^2 - e\,\dot{\vec{x}}\cdot\vec{A}(\vec{x}, t) + e\,\varphi(\vec{x}, t)\\ &= \frac{1}{2}m\,\dot{\vec{x}}^2 + e\varphi(\vec{x}, t) = \frac{1}{2m}\left[\vec{p} - e\,\vec{A}(\vec{x}, t)\right]^2 + e\,\varphi(\vec{x}, t)\,.\end{aligned} \tag{11}$$

(b)

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \quad \rightarrow \quad B_i = \varepsilon_{ijk}\partial^j A^k\,, \tag{12}$$

mit $\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{klm} = \delta_i^l\delta_j^m - \delta_i^m\delta_j^l$. Somit:

$$\begin{aligned}[\dot{\vec{x}}\times\vec{B}]_i &= \varepsilon_{ijk}\dot{x}^j B^k = \varepsilon_{ijk}\dot{x}^j\varepsilon_{klm}\partial^l A^m =\\ &= (\delta_i^l\delta_j^m - \delta_i^m\delta_j^l)\dot{x}^j\partial^l A^m = \dot{x}^m\partial_i A_m - \dot{x}^l\partial_l A^i =\\ &= (\partial_i A_j - \partial_j A_i)\dot{x}^j\,.\end{aligned} \tag{13}$$

(c)

$$\begin{aligned}\dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial x_i} = \frac{1}{m}(p_j - eA_j)e\partial_i A_j - e\partial_i\varphi\,,\\ \dot{x}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{1}{m}(p_i - eA_i)\,.\end{aligned} \tag{14}$$

Folgt daraus dann:

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x}_i &= \frac{d}{dt}(p_i - eA_i) = \dot{p}_i - e(\partial_j A_i \dot{x}_j + \partial_t A_i) = \\
&= e\dot{x}_j \partial_i A_j - e\partial_i \varphi - e(\partial_j A_i \dot{x}_j + \partial_t A_i) = \\
&= e(-\partial_i \varphi - \partial_t A_i) - e(\partial_j A_i - \partial_i A_j)\dot{x}_j \,, \\
\rightarrow \quad m\ddot{\vec{x}} &= e(\vec{E} + \dot{\vec{x}} \times \vec{B}) \,.
\end{aligned} \tag{15}
$$

Aufgabe 3 Energiesatz

(a) Mit $U(t) = U_0 \cos \omega t$ und in Zylinderkoordinaten, starten wir mit:

$$
\begin{aligned}
\vec{E}(t) &= \frac{1}{d} U(t) \vec{e}_z \ , \\
\vec{B} &= B \vec{e}_\varphi \ .
\end{aligned} \tag{16}
$$

Mit Aufgabe 7.2) könnte man B ausrechnen:

$$
\int_{\partial F} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \varepsilon_0 \mu_0 \int_F \dot{\vec{E}} \cdot d\vec{A} \,. \tag{17}
$$

Und somit:

$$
\begin{aligned}
2\pi r B &= \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{d} \int_F \dot{U}(t) \vec{e}_z \cdot d\vec{A} = -\frac{\varepsilon_0 \mu_0}{d} \omega U_o \pi r^2 \sin \omega t \ , \\
\rightarrow \quad \vec{B} &= -\frac{\varepsilon_0 \mu_0}{2d} \, \omega \, U_0 \, r \, \sin \omega t \, \vec{e}_\varphi \,, \quad 0 \le r \le b \,.
\end{aligned} \tag{18}
$$

Die Feldenergie im Kondensator ist:

$$
\begin{aligned}
W(t) &= \int_V \Big(\frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \Big) dV = \\
&= \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{2d^2} U_0^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^b r dr \int_0^d dz \Big(\frac{1}{\mu_0} \cos^2 \omega t + \frac{\varepsilon_0}{4} \omega^2 r^2 \sin^2 \omega t \Big) = \\
&= \frac{\varepsilon_0}{2d^2} U_0^2 2\pi d \Big(\frac{b^2}{2} \cos^2 \omega t + \frac{\varepsilon_0 \mu_0 b^4}{16} \omega^2 \sin^2 \omega t \Big) = \\
&= \frac{\varepsilon_0 \pi b^2}{2d} U_0^2 (\cos^2 \omega t + \frac{\varepsilon_0 \mu_0 b^2}{8} \omega^2 \sin^2 \omega t) = \\
&= \frac{1}{2} C U^2 + \frac{1}{2} L I^2 = W_E(t) + W_B(t) \ ,
\end{aligned} \tag{19}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{\varepsilon_0 \pi b^2}{d} \ , \\
I &= C \dot{U} \ , \\
L &= \frac{\mu_0 d}{8\pi} \ .
\end{aligned} \tag{20}
$$

Mit $T = 2\pi/\omega$, folgt es dass:

$$\begin{aligned} \int_0^T dt \cos^2 \omega t &= \frac{T}{2} \ , \\ \int_0^T dt \sin^2 \omega t &= T - \int_0^T dt \cos^2 \omega t = \frac{T}{2} \ . \end{aligned} \tag{21}$$

Und somit:

$$\langle W(t) \rangle = \frac{C\, U_0^2}{4} (1 + \frac{\varepsilon_0 \mu_0 b^2}{8} \omega^2) \ . \tag{22}$$

b) Aus

$$\begin{aligned} \langle W_E(t) \rangle &= \langle W_B(t) \rangle \ , \\ \rightarrow \quad 1 &= \frac{\varepsilon_0 \mu_0 b^2}{8} \omega^2 \ , \end{aligned} \tag{23}$$

folgt daraus dann:

$$\omega = \sqrt{\frac{8}{\varepsilon_0 \mu_0 b^2}} = 2\sqrt{2} \frac{c}{b} \ . \tag{24}$$

Mit $c = 3 \cdot 10^8 m/s$, und $b = 4 \cdot 10^{-2} m \rightarrow \ \omega \approx 2.1 \cdot 10^{10} \mathrm{Hz} = 21\,\mathrm{GHz}\,.$

c) Die Definition der Energiefluss ist:

$$\begin{aligned} \vec{S}(t) &= \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = -\frac{\varepsilon_0 \omega}{2d^2} U_0^2 r \cos \omega t \sin \omega t \, [\vec{e}_z \times \vec{e}_\varphi] = \\ &= \frac{\varepsilon_0 \omega}{2d^2} U_0^2 r \cos \omega t \sin \omega t \, [\vec{e}_r] \ . \end{aligned} \tag{25}$$

Und dann:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \int_F \vec{S}(t)\big|_{r=b} \cdot d\vec{A} = \int_0^{2\pi} b d\varphi \int_0^d dz S(t) = \\ &= 2\pi b d \frac{\varepsilon_0 \omega}{2d^2} U_0^2 b \cos \omega t \sin \omega t = \frac{\varepsilon_0 \omega \pi b^2}{d} U_0^2 \cos \omega t \sin \omega t = \\ &= -UC\dot{U} = -UI \ . \end{aligned} \tag{26}$$

Aus

$$\int_0^T dt \cos \omega t \sin \omega t = 0 \,, \tag{27}$$

folgt daraus dann: $\langle \phi(t) \rangle = 0$.

Aufgabe 4 Energietransport im Leitungsdraht

Aus die Maxwellgleichung $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \vec{E}$, und aus $\partial_t \vec{E} = 0$ (I gleichstrom ist), folgt

$$\begin{aligned} \oint_{\partial F} \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_0 \int_F \vec{J} \cdot d\vec{A} \,, \\ \rightarrow \quad 2\pi a B &= \mu_0 I \ . \end{aligned} \tag{28}$$

Aus der Definition der Energiefluss:

$$|\vec{S}| = \frac{1}{\mu_0}|\vec{E} \times \vec{B}| = \frac{1}{\mu_0}EB = \frac{1}{2\pi a}EI \ . \tag{29}$$

Und somit:

$$\begin{aligned} &P = UI = I \cdot E\,l \quad \text{mit} \quad U = \int_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{l} = E\,l\,, \\ \rightarrow \quad &|\vec{S}| = \frac{P}{2\pi a l}\,. \end{aligned} \tag{30}$$