

## Lösung für Blatt 9 „Elektrodynamik“

### Aufgabe 1 Selbstinduktion

Ein Koaxialkabel setzt sich aus zwei koaxialen Leitern zusammen, in welchen ein Strom  $I$  bzw.  $-I$  in entgegengesetzte Richtungen entlang des Leiters fließt, vgl. Fig. 1. Wir betrachten zwei Hohlzylinder mit Radien  $R_1$  und  $R_2 > R_1$ .

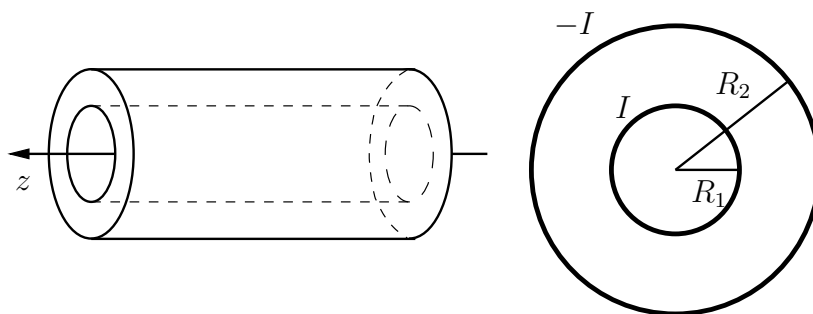


Abbildung 1: Das Koaxialkabel besteht aus zwei Hohlzylindern mit Radien  $R_1$  und  $R_2$  in denen in entgegengesetzte Richtung ein Strom  $I$  resp.  $-I$  fließt.

Für das von einem Hohlzylinder mit Radius  $R$  und Strom  $I$  erzeugte magnetische Feld  $\vec{B}$  findet man (analog zum Feld eines Vollzylinders)

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \theta(|\vec{r}| - R) \vec{e}_\varphi. \quad (1)$$

Die Superposition eines Hohlzylinders mit Radius  $R_1$  und Strom  $I$  sowie eines Hohlzylinders mit Radius  $R_2$  und Strom  $-I$  liefert

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} 0, & |\vec{r}| < R_1, \\ \mu_0 I / (2\pi r) \vec{e}_\varphi, & R_1 < |\vec{r}| < R_2, \\ 0, & R_2 < |\vec{r}|. \end{cases} \quad (2)$$

Wir berechnen nun die magnetische Feldenergie  $W_m$  für ein Koaxialkabel der Länge  $l$

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2\mu_0} \int d^3x |\vec{B}(\vec{x})|^2 \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \int_{-l/2}^{l/2} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{R_1}^{R_2} dr r \left( \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln(R_2/R_1) \times I^2 \end{aligned} \quad (3)$$

und identifizieren die Induktivität  $L = (\mu_0 I / 2\pi) \ln(R_2/R_1)$ , sodass die Induktivität pro Längeneinheit  $L/l$  folgt als

$$\frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(R_2/R_1). \quad (4)$$

## Aufgabe 2 Invarianter Abstand

(a) Wir definieren hier zuerst den kontravarianten 4-er Vektor

$$x^\mu = (ct, \vec{x}), \quad (5)$$

sowie den kovarianten 4-er Vektor

$$x_\mu = (ct, -\vec{x}). \quad (6)$$

Wir können nun die gegebene Transformation schreiben als

$$x'^0 = \gamma x^0 - \gamma\beta_1 x^1 - \gamma\beta_2 x^2 - \gamma\beta_3 x^3, \quad (7)$$

$$x'^j = x^j + (\gamma - 1)(x^1\beta_1 + x^2\beta_2 + x^3\beta_3)\beta_j/\vec{\beta}^2 - \gamma\beta_j x^0, \quad (8)$$

wobei  $\beta_i = v_i/c$  und  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \vec{\beta}^2}$  benutzt wurde, sodass sich die Transformation als

$$x'^\sigma = \Lambda^\sigma_\mu x^\mu \quad (9)$$

schreiben lässt mit

$$\Lambda^\sigma_\mu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_1 & -\gamma\beta_2 & -\gamma\beta_3 \\ -\gamma\beta_1 & 1 + (\gamma - 1)\frac{\beta_1^2}{\beta^2} & (\gamma - 1)\frac{\beta_1\beta_2}{\beta^2} & (\gamma - 1)\frac{\beta_1\beta_3}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_2 & (\gamma - 1)\frac{\beta_1\beta_2}{\beta^2} & 1 + (\gamma - 1)\frac{\beta_2^2}{\beta^2} & (\gamma - 1)\frac{\beta_2\beta_3}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_3 & (\gamma - 1)\frac{\beta_1\beta_3}{\beta^2} & (\gamma - 1)\frac{\beta_2\beta_3}{\beta^2} & 1 + (\gamma - 1)\frac{\beta_3^2}{\beta^2} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

(b) Die Transformation zwischen eines kontravarianten Vektors zu einem kovarianten Vektors lautet

$$x_\nu = g_{\nu\mu} x^\mu \quad (11)$$

mit der Minkowski-Metrik

$$g_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Für eine Lorentztransformation  $\Lambda^\sigma_\nu$  gilt die Bedingung, dass

$$\Lambda^\lambda_\mu g_{\lambda\sigma} \Lambda^\sigma_\nu = g_{\mu\nu} \quad (13)$$

erfüllt sein soll. Für den Fall  $\vec{\beta} = \beta \vec{e}_1$  folgt

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

und obige Bedingung lässt sich leicht verifizieren.

- (c) Mithilfe des kontravarianten Abstandes  $s_{12}^\mu = (x_1)^\mu - (x_2)^\mu$ , sowie des kovarianten Abstandes  $s_{12,\mu} = (x_1)_\mu - (x_2)_\mu$  folgt das Abstandskadrat

$$s_{12}^2 = s_{12}^\mu s_{12,\mu} = s_{12}^\mu g_{\mu\nu} s_{12}^\nu. \quad (15)$$

Unter einer Lorentz-Transformation  $\Lambda$  transformiert ein kontravarianter Vektor als

$$x'^\sigma = \Lambda^\sigma_\mu x^\mu \quad (16)$$

und somit auch der kontravarianter Abstand als

$$(s'_{12})^\sigma = \Lambda^\sigma_\mu s_{12}^\mu. \quad (17)$$

Somit finden wir für das Abstandskadrat

$$\begin{aligned} (s'_{12})^2 &= (s'_{12})^\lambda g_{\lambda\sigma} (s'_{12})^\sigma \\ &= \left( \Lambda^\lambda_\mu s_{12}^\mu \right) g_{\lambda\sigma} \left( \Lambda^\sigma_\nu s_{12}^\nu \right) \\ &= s_{12}^\mu \left( \Lambda^\lambda_\mu g_{\lambda\sigma} \Lambda^\sigma_\nu \right) s_{12}^\nu \end{aligned} \quad (18)$$

Durch Vergleich von Gleichung (15) und (18) folgt, dass das Abstandskadrat invariant unter Lorentz-Transformationen ist, falls gilt

$$g_{\mu\nu} = \Lambda^\lambda_\mu g_{\lambda\sigma} \Lambda^\sigma_\nu, \quad (19)$$

was genau der definierende Gleichung der Lorentz-Transformationen entspricht.

### Aufgabe 3 Maxwell'scher Spannungstensor

- (a) (ai) Der Maxwell'sche Spannungstensor ist definiert als

$$T_{ij} = \epsilon_0 E_i E_j + \frac{1}{\mu_0} B_i B_j - \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2 \right) \delta_{ij} \quad (20)$$

Das elektrische Feld im Inneren des Plattenkondensators mit Ladungsdichte  $\sigma$  auf der oberen und  $-\sigma$  auf der unteren Platte ist

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{e}_z, \quad (21)$$

so der Spannungstensor im Inneren des Kondensators folgende Form hat:

$$T_{ij} = \epsilon_0 \frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

Ausserhalb des Kondensators verschwindet der Spannungstensor. In der Vorlesung wurde die Impulsbilanz in einem Volumen  $V$  hergeleitet:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \vec{p}_V^{\text{mech}} + \vec{p}_V^{\text{Feld}} \right)_i &= \int_V dV \sum_{j=1}^3 \partial_{x_j} T_{ij} \\ &= \int_{\partial V} dA \sum_{j=1}^3 T_{ij} n_j. \end{aligned} \quad (23)$$

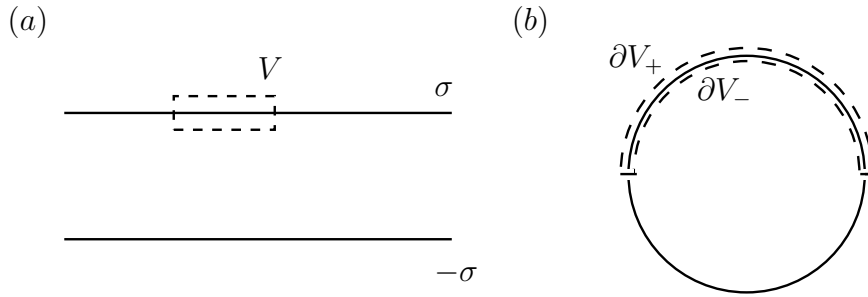


Abbildung 2: (a) Volumen  $V$ , das einen Teil der oberen Kondensatorplatte beinhaltet. (b) Volumen  $V$  mit  $\partial V = \partial V_+ + \partial V_-$ , das die obere Kugelhälfte beinhaltet.

Hier entspricht die rechte Seite einer Impulsänderung und kann somit als Kraft interpretiert werden. Wir wählen ein Volumen  $V$ , das einen Teil der oberen Kondensatorplatte umfasst, cf. Fig. 2. Die Beiträge der Oberflächen senkrecht zum Kondensator kompensieren sich gegenseitig (da der Spannungstensor konstant ist und jeweils gegenüberliegende Flächen Normalenvektoren mit umgekehrten Vorzeichen haben), sodass nur die Obeffläche parallel zum Kondensator im Inneren übrig bleibt (Tensor verschwindet aussen).

$$F_i = \int_{\partial V} dA \sum_{j=1}^3 T_{ij} n_j = \int_{\partial V} dA T_{i3} (-1) = -A \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \delta_{i3}, \quad (24)$$

sodass die Kraft pro Fläche auf die obere Platte folgt als

$$\frac{\vec{F}}{A} = -\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \vec{e}_z. \quad (25)$$

(a) Dieses Resultat lässt sich auch einfacher berechnen, indem wir die Kraft auf die obere Platte durch das von der unteren Platte erzeugte elektrische Feld berechnen.

Das gesamte elektrische Feld eines Kondensators kann in zwei Beiträge aufgespalten werden:

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{e}_z = \vec{E}_\sigma + \vec{E}_{-\sigma} \quad \text{mit} \quad \vec{E}_\sigma = \vec{E}_{-\sigma} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{e}_z. \quad (26)$$

Nun finden wir die Kraft auf eine Fläche  $A$  der oberen Kondensatorplatte:

$$\vec{F} = Q_A \vec{E}_{-\sigma} = A\sigma \vec{E}_{-\sigma} = -A \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \vec{e}_z \quad (27)$$

sodass wiederum die selbe Kraft pro Fläche folgt.

(b) Wir betrachten nun zuerst eine Hohlkugel mit konstanter Oberflächenladungsdichte  $\sigma$  und berechnen die Kraft auf die obere Kugelhälfte.

Es ist hilfreich, den Spannungstensor in folgender Form darzustellen ( $\vec{B} = 0$ ):

$$\mathbf{T} = \epsilon_0 \vec{E} \vec{E}^T - \frac{\epsilon_0}{2} \mathbb{1} (\vec{E}^T \vec{E}). \quad (28)$$

Das Feld einer Kugelschale ist

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r, & r > R, \\ 0, & r < R, \end{cases} \quad (29)$$

wobei  $Q = \sigma \cdot 4\pi R^2$  benutzt wurde. Der Spannungstensor lässt sich nun schreiben als

$$\mathbf{T} = \epsilon_0 \left( \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \right)^2 \times \left[ \vec{e}_r \vec{e}_r^T - \frac{1}{2} \mathbb{1} \right] \quad (30)$$

Wir betrachten nun ein Volumen, das die obere Hälfte der Kugelschale infinitesimal umschließt. Das Oberflächenintegral über die innere Oberfläche  $\partial V_-$  verschwindet und wir finden

$$\vec{F} = \int_{\partial V} dA \mathbf{T} \vec{n} = \int_{\partial V_+} dA \frac{\sigma^2}{\epsilon_0} \times \left[ \vec{e}_r \vec{e}_r^T - \frac{1}{2} \mathbb{1} \right] \vec{e}_r = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \int_{\partial V_+} dA \vec{e}_r, \quad (31)$$

wobei wir benutzt haben, dass  $r = R$  auf der Kugelschale. Mit

$$\vec{e}_r = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \quad (32)$$

folgt

$$\vec{F} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} R^2 \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \frac{\pi R^2 \sigma^2}{2\epsilon_0} \vec{e}_z. \quad (33)$$

Wir können das Ergebnis so interpretieren, dass wir das Feld der unteren Kugelhälfte auf der oberen Kugelhälfte mit der Ladungsdichte der oberen Kugelhälfte multiplizieren und über die obere Kugelhälfte integrieren. Somit erhalten wir für den Fall unterschiedlicher Ladungsdichten

$$\vec{F} = \frac{\pi R^2 \sigma_1 \sigma_2}{2\epsilon_0} \vec{e}_z. \quad (34)$$