Institut für Theoretische Physik, Universität Zürich

Lösung für Probeklausur „Elektrodynamik“

Prof. Dr. T. Gehrmann Probeklausur – FS 2013

Teil I: KURZFRAGEN

K1

$$\frac{d\vec{F}_{21}}{dl} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{R}\vec{e}_y = -\frac{d\vec{F}_{21}}{dl} \tag{1}$$

Wenn die Ströme in entgegengesetzter Richtung fliessen, ist die Kraft abstossend. Die Richtung der Kraft ist senkrecht zu den Drähten [0.5 Punkte für den Betrag, 0.5 für die Richtung].

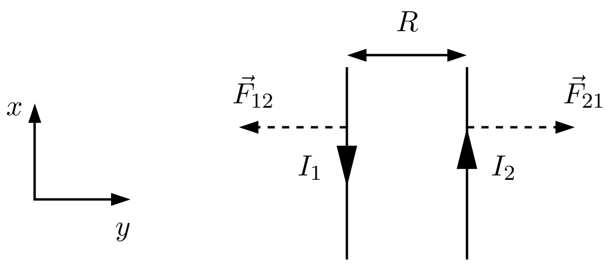

Abbildung 1: Biot-Savart Gesetz.

K2

$$\phi(\vec{r}\,) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{|\vec{r}\,|^3}\ . \tag{2}$$

[0.5 Punkt für $\phi(\vec{r})$, 0.5 für die Skizze].

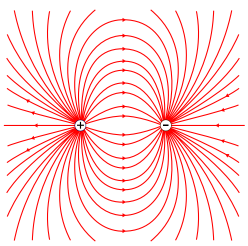

Abbildung 2: Dipolfeld

K3

- Die Gleichung $\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$ ist der Energieerhaltungssatz der Elektrodynamik [0.5 Punkte].
- Die Bedeutung von $\frac{\partial w}{\partial t}$ ist die zeitliche Änderung der Feldenergie (des elektromagnetischen Feldes) pro Volumeneinheit [0.5 Punkte].
- Die Bedeutung von $\vec{S}$ ist der Ausfluss elektromagnetischer Energie pro Flächen- und Zeiteinheit (Energiestromdichte) [0.5 Punkte].
- Die Bedeutung von $-\vec{j} \cdot \vec{E}$ ist die (von Ladungsträgern) verrichtete mechanische Leistung [0.5 Punkte].

K4 (1 Punkt)

Die Tangentialkomponente ist stetig.
Die Normalkomponente macht an der geladenen Fläche einen Sprung um $\frac{\sigma(\vec{x})}{\varepsilon_0}$.

K5

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x}, t) - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{x}, t), \quad \vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}, t) \tag{3}$$

$$\phi'(\vec{x}, t) = \phi(\vec{x}, t) - \frac{\partial}{\partial t}\Lambda(\vec{x}, t), \quad \vec{A}'(\vec{x}, t) = \vec{A}(\vec{x}, t) + \vec{\nabla}\Lambda(\vec{x}, t) \tag{4}$$

$$A'^{\mu} = A^{\mu} - \partial^{\mu}\Lambda(\vec{x}, t), \quad \text{wobei} \quad A^{\mu} = \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A}\right), \quad \partial^{\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right) \tag{5}$$

K6 (1.5 Punkte)

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = 0\,, \qquad \vec{k} \cdot \vec{E} = 0\,, \qquad \vec{k} \cdot \vec{B} = 0\,, \qquad \vec{S} \sim \vec{k}\,.$$

Teil II: AUFGABEN

Aufgabe 1

1. [3 Punkte] OBdA setzen wir die Ladung auf den $z = 0$ Ebene. Wir brauchen 3 Spiegelladungen, um die Randbedingungen zu erfüllen. Die Ladungen und Positionen der 4 Ladungen sind

$$\begin{array}{ll} q & (a, b, 0), \\ q_1 = -q & (-a, b, 0), \\ q_2 = q & (-a, -b, 0), \\ q_3 = -q & (a, -b, 0). \end{array}$$

   Die Kraft auf die Ladung q (am Ort $\vec{x} = (a, b, 0)$) ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{x}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{3} \frac{q_i}{\sqrt{(a-x_i)^2 + (b-y_i)^2 + (z_i)^2}^3} \begin{pmatrix} a - x_i \\ b - x_i \\ -z_i \end{pmatrix} \\ &= \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \left(- \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}^3} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}^3} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{b^2} \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} \left(\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}^{(-3)} - 1 \right) \\ \frac{1}{b^2} \left(\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}^{(-3)} - 1 \right) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{6}$$

2. [3 Punkte] Die Ladungsdichte ist

$$\begin{aligned} \rho(\vec{x}) = & \, q \left[\delta(x-a)\delta(y-b) - \delta(x+a)\delta(y-b) \right. \\ & \left. + \delta(x+a)\delta(y+b) - \delta(x-a)\delta(y+b) \right] \delta(z). \end{aligned} \tag{7}$$

   Das Quadrupolmoment, gegeben durch $Q^{ij} = \int \left(3x^i x^j - |x|^2 \delta^{ij} \right) \rho(\vec{x}) d^3x$, ist

$$\begin{aligned} Q^{11} &= q \left((2a^2 - b^2) - (2a^2 - b^2) + (2a^2 - b^2) - (2a^2 - b^2) \right) = 0, \\ Q^{22} &= q \left((2b^2 - a^2) - (2b^2 - a^2) + (2b^2 - a^2) - (2b^2 - a^2) \right) = 0, \\ Q^{33} &= q \left((-a^2 - b^2) - (-a^2 - b^2) + (-a^2 - b^2) - (-a^2 - b^2) \right) = 0, \\ Q^{12} &= Q^{21} = q \left((3ab) - (3(-a)b) + (3(-a)(-b)) - (3a(-b)) \right) = 12qab, \\ Q^{23} &= Q^{32} = Q^{13} = Q^{31} = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

3. [1 Punkt] Wegen der totalen Ladung $q_{\text{tot}} = \int \rho(\vec{x}) d^3x = 0$ und dem Dipolmoment $\vec{p} = \int \vec{x} \rho(\vec{x}) d^3x = 0$, ist das Potential im Fernfeld gegeben durch das Quadrupolmoment.

Das Potential im Fernfeld ist dann

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{3qab}{\pi\epsilon_0}\frac{xy}{r^5}. \tag{9}$$

Aufgabe 2

1. [1 Punkt] Die Änderung der Ladung auf den Platten entspricht dem Strom I. Deswegen gilt

$$Q(t) = Q_0 - I \cdot t \tag{10}$$

   Ladungsdichte ist gegeben durch

$$\sigma(t) = \frac{Q(t)}{\pi R^2} = \frac{Q_0 - I \cdot t}{\pi R^2} \tag{11}$$

2. [1 Punkt] Wenn die Randeffekte vernachlässigt werden können, ist das Feld zwischen den Platten einfach (sei $\vec{e}_z$ in Richtung des Stromflusses):

$$\vec{E}(t) = \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0}\vec{e}_z = \frac{Q_0 - I \cdot t}{\epsilon_0 \pi R^2}\vec{e}_z \tag{12}$$

3. [3 Punkte] Das magnetische Feld erhalten wir direkt aus den Maxwell Gleichungen zusammen mit dem Satz von Stokes. Hierbei wird verwendet, dass das magnetische Feld entlang von $\vec{e}_\varphi$ zeigen muss, da sowohl der Strom, als auch der Verschiebungsstrom entlang von $\vec{e}_z$ zeigen. Für $r < R$ gilt

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0\epsilon_0 \frac{d}{dt}\vec{E} \tag{13}$$

$$\int_C \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 \int_A \vec{j} d\vec{A} + \mu_0\epsilon_0 \frac{d}{dt}\int_A \vec{E} d\vec{A} \tag{14}$$

$$B\, 2\pi r = \mu_0 I + \mu_0\epsilon_0 \dot{E}\pi r^2 \tag{15}$$

$$= \mu_0 I - \mu_0 \frac{r^2}{R^2} I \tag{16}$$

$$= \mu_0 I (1 - \frac{r^2}{R^2}) \tag{17}$$

   und für $r > R$ ist $B = 0$ (da sich der Beitrag des Stroms und des Verschiebungsstroms gerade kompensiert). Somit ist das magnetische Feld

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1 - r^2/R^2}{r}\theta(R - r)\vec{e}_\varphi. \tag{18}$$

4. [2 Punkte] Die elektromagnetische Feldenergie W ist

$$W = \int (\frac{\epsilon_0}{2}E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2) dV.$$

Die zeitliche Ableitung ist dann

$$\frac{d}{dt}W = \epsilon_0 \int E\dot{E}dV + \underbrace{\frac{1}{\mu_0}\int B\dot{B}dV}_{0} \tag{19}$$

$$= \frac{1}{A}\int \frac{U}{d} IdV = -UI \tag{20}$$

Aufgabe 3

1. [2 Punkte] Mit $\vec{\beta} = \beta\vec{e}_z$ folgt

$$\vec{E}' = \gamma\vec{E} + \gamma c\beta\vec{e}_z \times \vec{B} - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta^2 E_z\vec{e}_z$$
$$= \begin{pmatrix} \gamma E_x - \gamma c\beta B_y \\ \gamma E_y + \gamma c\beta B_x \\ \gamma E_z - \gamma^2\beta^2/(\gamma+1)E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(E_x - c\beta B_y) \\ \gamma(E_y + c\beta B_x) \\ E_z \end{pmatrix} \tag{21}$$

und

$$\vec{B}' = \gamma\vec{B} - \gamma c^{-1}\beta\vec{e}_z \times \vec{E} - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta^2 B_z\vec{e}_z$$
$$= \begin{pmatrix} \gamma B_x + \gamma\beta E_y/c \\ \gamma B_y - \gamma\beta B_x/c \\ \gamma B_z - \gamma^2\beta^2/(\gamma+1)B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(B_x + \beta E_y/c) \\ \gamma(B_y - \beta E_x/c) \\ B_z \end{pmatrix} \tag{22}$$

2. [3 Punkte] Aus den gegebenen Gleichungen für die Lorentz-Transformation erkennen wir, dass die einfachste Lösung für $\vec{\beta} = \beta\vec{e}_x$ zu finden ist.
Betrachten wir zuerst die Transformation des magnetischen Feldes in diesem Falle, gilt:

$$\vec{B}' = \gamma B_0\vec{e}_z - \gamma c^{-1}\beta\vec{e}_x \times E_0\vec{e}_y - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta^2 B_0(\vec{e}_x \cdot \vec{e}_z)$$
$$= \gamma(B_0 - c^{-1}\beta E_0)\vec{e}_z = \gamma(B_0 - \beta B_0/2)\vec{e}_z \neq 0, \tag{23}$$

was für $\beta \leq 1$ nicht verschwindet. Für das elektrische Feld gilt

$$\vec{E}' = \gamma E_0\vec{e}_y + \gamma c\beta\vec{e}_x \times B_0\vec{e}_z - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta^2 E_0(\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y)$$
$$= \gamma(E_0 - c\beta B_0)\vec{e}_y = \gamma(E_0 - 2\beta E_0)\vec{e}_y, \tag{24}$$

sodass für $\beta = 1/2$ das elektrische Feld im Bezugssystem K' verschwindet.
Somit gilt im Bezugssystem K', welches sich mit einer Geschwindigkeit $\vec{v} = c/2\vec{e}_x$ relativ zu K bewegt, dass

$$\vec{E}' = 0 \qquad \text{und} \qquad \vec{B}' = \frac{\sqrt{3}}{2}B_0\vec{e}_z\,, \tag{25}$$

wobei $\gamma = 2/\sqrt{3}$ benutzt wurde.

Allgemein betrachten wir ein beliebiges $\vec{\beta}$, mit $E_0 = cB_0/2$ folgt:

$$\vec{E}' = \frac{\gamma c B_0}{2} \begin{pmatrix} \beta_2(2 - \frac{\beta_1\gamma}{\gamma+1}) \\ (1-2\beta_1) - 2\beta_2^2\frac{\gamma}{\gamma+1} \\ -\beta_2\beta_3\frac{\gamma}{\gamma+1} \end{pmatrix} \tag{26}$$

Somit verschwindet $\vec{E}'$ für $\beta_2 = 0$, $\beta_1 = 1/2$ und β_3 beliebig. Allerdings muss die Lorentztransformation die Bedingung $\vec{\beta}^2 \leq 1$ erfüllen, um physikalisch sein. Somit muss gelten, dass $|\beta_3| \leq \sqrt{3}/2$, also ist jede Lorentztransformation mit

$$\vec{\beta} = 1/2\vec{e}_x + \beta_3\vec{e}_z \qquad \text{mit} \qquad |\beta_3| \leq \sqrt{3}/2 \tag{27}$$

Auch im allgemeinen Fall findet man kein physikalisches $\vec{\beta}$, sodass $\vec{B}' = 0$.

3. [2 Punkte] Betrachten wir nun den Fall eines bewegten Bezugssystems K', welches sich relativ zu K mit $\vec{\beta} = 1/2\vec{e}_x$ bewegt, folgt mit der Additionsregel für relativistische Geschwindigkeiten (sei $v_0 = 2c/3$ die Geschwindigkeit des Teilchens im System K und $u = \beta c = c/2$ die Geschwindigkeit von K' relativ zu K)

$$v_0' = \frac{v_0 - u}{1 - \frac{v_0 u}{c^2}} = \frac{\frac{2}{3}c - \frac{1}{2}c}{1 - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}}c = \frac{c}{4}. \tag{28}$$

Somit ist also dass die Geschwindigkeit zur Zeit $t = t' = 0$ im bewegten Bezugssystem K' gleich $c/4$. [1]

Aufgrund des orthogonalen B-Feldes bewegt sich die Ladung auf einer Kreisbahn in diesem Bezugssystem. Die Geschwindigkeit bleibt aber konstant.

[1] Formaler kann man die Lorentztransformation (mit $\beta = \vec{u}/c$) des Vierergeschwindigkeitsvektor

$$(V_0)^\mu = \gamma_{\vec{v}_0}\begin{pmatrix} c \\ \vec{v}_0 \end{pmatrix} \tag{29}$$

(mit $\gamma_{\vec{v}_0} = 1/\sqrt{1 - (\vec{v}_0/c)^2}$) ins neue Bezugssystem K' betrachten und so die Geschwindigkeit $\vec{v}_0'$ finden.