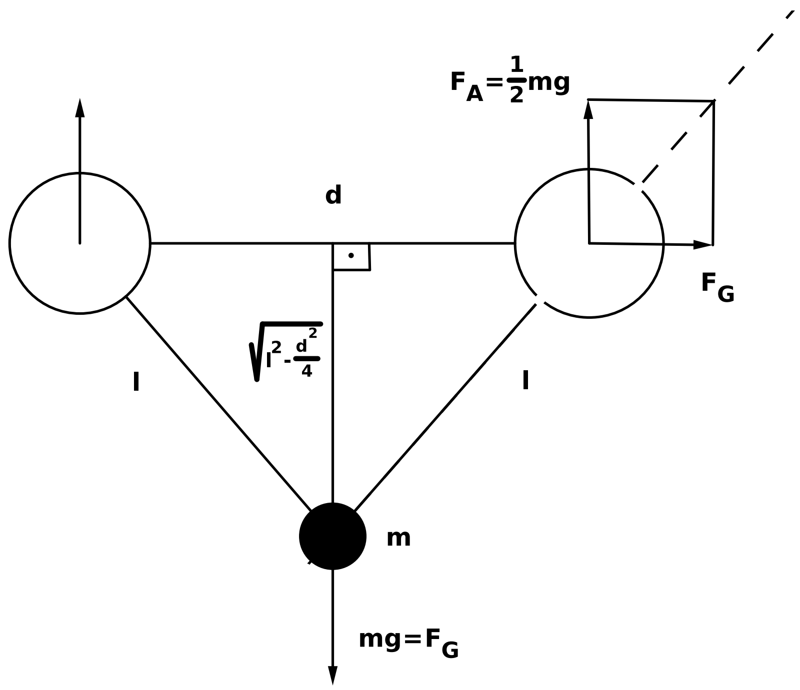
Institut für Theoretische Physik, Universität Zürich

# Lösung für Blatt 1 „Elektrodynamik"

Prof. Dr. T. Gehrmann Blatt 1 – FS 2013

## Aufgabe 1 Coulombkraft zwischen zwei Ladungen




Die Ballons halten durch den Auftrieb die Masse m.
Gleichgewicht: Resultierende aus $F_A$ und $F_G$ zeigt entlang des Seils.
Strahlensatz:

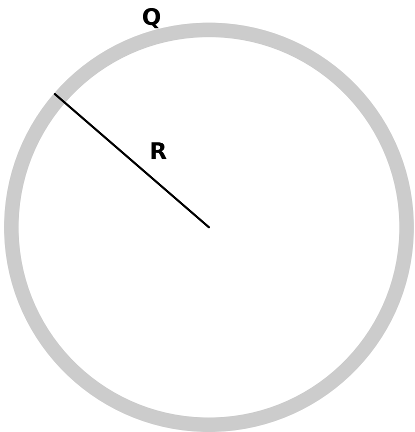
$$\frac{F_G}{d/2} = \frac{F_A}{\sqrt{l^2 - d^2/4}} \qquad \text{oder} \qquad \frac{F_G}{F_A} = \frac{d/2}{\sqrt{l^2 - d^2/4}} = \frac{d}{\sqrt{4l^2 - d^2}}$$

$$\frac{Q^2}{4\pi\epsilon d^2} = F_C = \frac{mgd}{2\sqrt{4l^2 - d^2}} \qquad ; \qquad \frac{Q^2}{4\pi\epsilon d^2} = F_C$$

$$\Rightarrow Q^2 = \frac{2\pi\epsilon mgd^3}{\sqrt{4l^2 - d^2}} \Rightarrow |Q| = \sqrt{\frac{2\pi\epsilon mgd^3}{\sqrt{4l^2 - d^2}}} = 5,56.10^{-7}C$$

## Aufgabe 2 Elektrische Feldstärke I

a) $Q$ verteilt auf einer dünnen Kugelschale mit Radius $R$.




Integralsatz:

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\Leftrightarrow \int_{\partial V} \vec{E} d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon}\int_V \rho dV = \frac{Q(V)}{\epsilon}$$

i) Innen: $r < R$

$$E_r(r) 4\pi r^2 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{E} = 0 \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$$

$$\Rightarrow \phi(\vec{r}) = const. = c$$

ii) Aussen: $r > R$.

$$E_r(r) 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon}$$

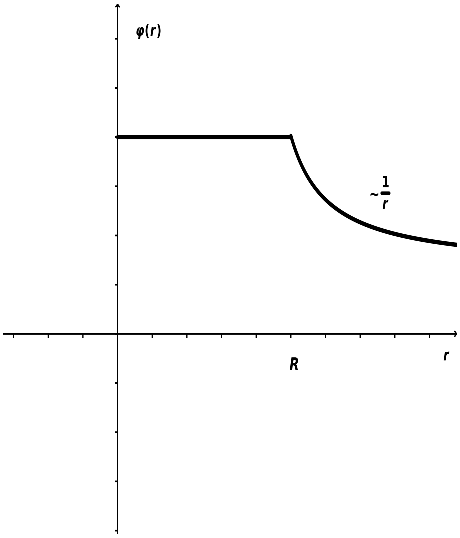
$$\Rightarrow E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \qquad \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

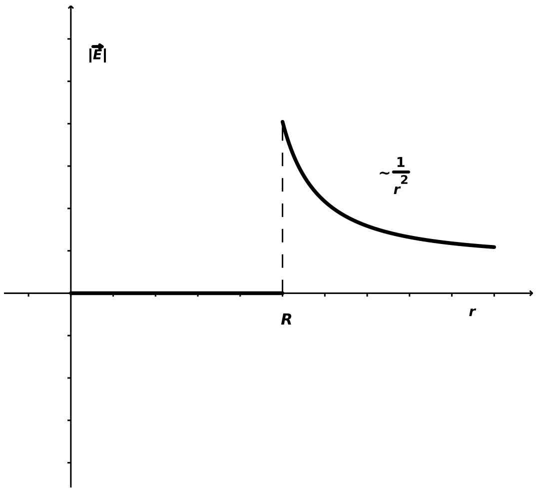
$$\phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r} + d$$

**Normierung:** $\quad \phi(\infty) = 0 \Rightarrow d = 0$

Wähle $c$ so, dass $\phi$ stetig ist.

$$\Rightarrow c = \frac{Q}{4\pi\epsilon R}.$$




Ohne Integralsatz:

$$
\begin{aligned}
\phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_{V'} dV' \frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon R^2}\int d\Omega \int_0^\infty dr' r'^2 \frac{Q\delta(r'-R)}{\sqrt{r^2-2rr'\cos\theta+r'^2}}\frac{1}{4\pi} \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon R^2}\frac{2\pi}{4\pi}\int_{-1}^{1} dcos\theta' R^2 \frac{1}{\sqrt{r^2-2rR\cos\theta'+R^2}} \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon 2}\int_{-1}^{1} dx \frac{1}{\sqrt{r^2+R^2-2rRx}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon 2}\frac{(-1)}{2rR}2\sqrt{r^2+R^2+R^2-2rRx}\Big|_{-1}^{1} \\
&= -\frac{Q}{4\pi\epsilon}\frac{1}{2rR}(|r-R|-(r+R))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&r > R \qquad \phi(\vec{r}) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon}\frac{1}{2rR}(-2R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r}; \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\frac{\vec{r}}{r^2} \\
&r < R \qquad \phi(\vec{r}) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon}\frac{1}{2rR}(-2r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon R} = const. \rightarrow \vec{E} = \vec{0}
\end{aligned}
$$

Hier steht $\phi$ stetig und $\phi(\infty) = 0$ schon in $\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int d^3\vec{r'}\frac{\rho(\vec{r'})}{(\vec{r}-\vec{r'})}$

b) Vollkugel

$$
\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \rho_0 = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = konst. & r < R \\ 0 & r > R \end{cases}
$$

Das Potential ist dann durch die Auflösung der folgenden Gleichung gegeben:

$$
\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}).
$$

Innen:

$$E_r(r) 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon}\rho\frac{4\pi}{3}r^3$$

$$E_r(r) = \frac{\rho}{3\epsilon}r = \frac{3}{4}\frac{Q}{\pi R^3}\frac{1}{3\epsilon}r = \frac{Q}{4\pi\epsilon R^2}\frac{r}{R}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon R^3}\vec{r} \qquad \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \qquad \Rightarrow \phi(\vec{r}) = \frac{-Q}{8\pi\epsilon R^3}r^2 + c$$

Aussen:

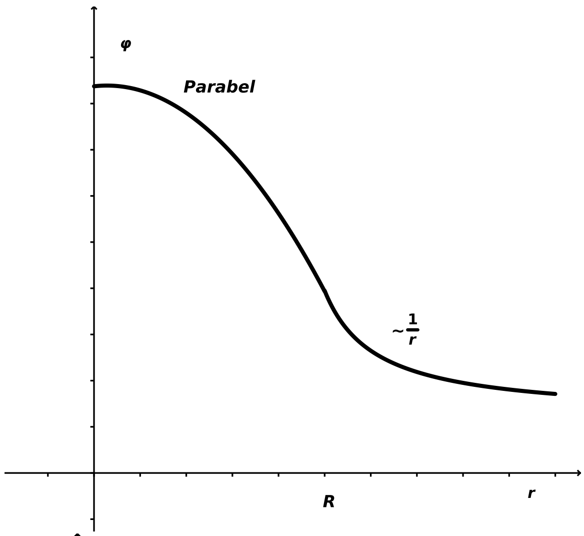
$$E_r(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon r^2}\frac{Q}{\epsilon} = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\frac{1}{r^2}$$

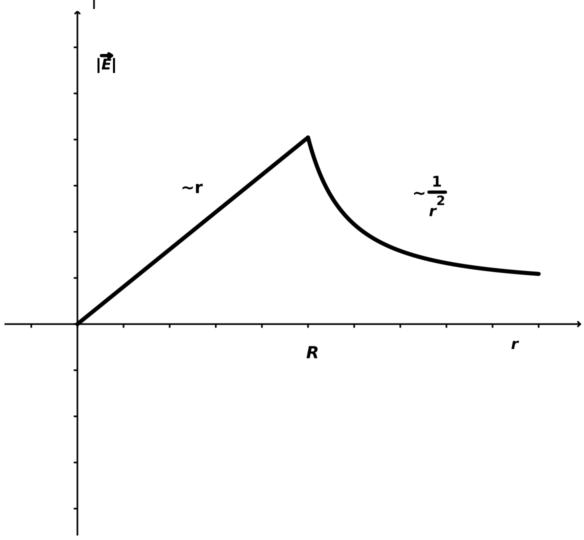
$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\frac{\vec{r}}{r^3} \text{ } (\Rightarrow \vec{E} \text{ stetig}) \text{ (gleiches } \vec{E} \text{ wie im Aussenraum der Hohlkugel)}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \Rightarrow \phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\frac{1}{r} \qquad (\phi(\infty) = 0)$$

$$\phi \text{ stetig} \Rightarrow \frac{Q}{4\pi\epsilon R} = -\frac{Q}{8\pi\epsilon R} + c \Rightarrow c = \frac{3Q}{8\pi\epsilon R}$$

$$\Rightarrow \phi(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{Q}{8\pi\epsilon R^3} & r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon r} & r > R \qquad \text{(gleiches } \phi \text{ wie im Aussenraum der Hohlkugel)} \end{cases}$$



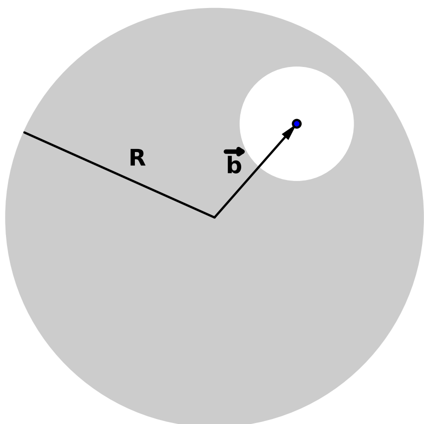
Ohne Integralsatz:

$$\rho = \rho_0 \theta(R - r) \qquad \text{mit} \qquad \rho_0 = \frac{Q}{\frac{4\pi}{3} R^3}$$

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V dV' \frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} = \frac{1}{4\pi\epsilon} 2\pi\rho_0 \int_{-1}^{1} d\cos(\theta') \int_0^R dr' r'^2 \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr'\cos\theta' + r'^2}} \\
&= \frac{2\pi\rho_0}{4\pi\epsilon} \int_0^R dr' r'^2 (-\frac{1}{2rr'}) 2\sqrt{r^2 - 2rr'\cos\theta' + r'^2} \Big|_{-1}^{1} \\
&= \frac{2\pi\rho_0}{4\pi\epsilon} (-\frac{1}{r}) \int_0^R dr' r' (|r - r'| - (r - r')) \\
&= \frac{2\pi\rho_0}{4\pi\epsilon r} \begin{cases} \int_0^r dr' r' (2r') + \int_r^R dr' r' (2r) & r < R \\ \int_0^R dr' r' (2r') & r > R \end{cases} \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon r} \frac{3}{2R^3} \begin{cases} \frac{2}{3} r^3 + r(R^2 - r^2) & r < R \\ \frac{2}{3} R^3 & r > R \end{cases} \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon r} \frac{3}{2R^3} \begin{cases} rR^2 - \frac{1}{3} r^3 & r < R \\ \frac{2}{3} R^3 & r > R \end{cases} = \begin{cases} \frac{Q}{8\pi\epsilon R^3} (3R^2 - r^2) & r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon r} & r > R \end{cases}
\end{aligned}$$

erhalte $\vec{E}$ aus $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$.

### Aufgabe 3 Elektrische Feldstärke II




a)$\vec{E}$-Feld einer homogenen geladenen Vollkugel: Ladungsdichte $\rho_0 = const.$

$$\vec{E}_k(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{3\epsilon} \vec{r}.$$

Der Hohlraum kann als Überlagerung mit Ladungsdichte $-\rho_0$ angesehen werden.

$$\vec{E}_H = -\frac{\rho_0}{3\epsilon}(\vec{r} - \vec{b}) \qquad \text{(für den Innenraum des Hollraums)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{E} &= \vec{E}_k + \vec{E}_H \qquad \text{(aufgrund der Linearität der MWG).} \\ &= \frac{\rho_0}{3\epsilon}\vec{b} \end{aligned}$$

homogenes Feld mit Richtung $|| \, \vec{b}$.

b)$|\vec{E}| \sim |\vec{b}|$.

## Aufgabe 4 Potential eines Wasserstoffatoms

$$\vec{\nabla} f(r) = \frac{\partial f(r)}{\partial r}\frac{\vec{r}}{r}; \qquad (fg)'' = gf'' + 2g'f' + fg''$$

$$\Delta U(r,\theta,\phi) = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r U) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta U) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\phi^2 U$$

$$f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a)$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\rho(\vec{r}) &= -\epsilon_0\Delta\phi(\vec{r}) \\
&= -\frac{e}{4\pi}\Delta((\frac{1}{r} + \frac{1}{a_0})e^{-2\frac{r}{a_0}}) \\
&= -\frac{e}{4\pi}(e^{-2\frac{r}{a_0}}\Delta(\frac{1}{r} + \frac{1}{a_0}) + 2(\vec{\nabla}(\frac{1}{r} + \frac{1}{a_0}))(\vec{\nabla}e^{-2\frac{r}{a_0}}) + (\frac{1}{r} + \frac{1}{a_0})\Delta e^{-2\frac{r}{a_0}}) \\
&= -\frac{e}{4\pi}(e^{-2\frac{r}{a_0}}(-4\pi\delta^3(\vec{r})) + 2(-\frac{\vec{r}}{r^3})(-\frac{2}{a_0}e^{-2\frac{r}{a_0}}\frac{\vec{r}}{r}) + (\frac{1}{r} + \frac{1}{a_0})\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2(-\frac{2}{a_0})e^{-\frac{2r}{a_0}})) \\
&= -\frac{e}{4\pi}(-4\pi\delta^3(\vec{r}) + \frac{4}{a_0}\frac{1}{r^2}e^{-2\frac{r}{a_0}} + (\frac{1}{r} + \frac{1}{a_0})\frac{1}{r^2}(-\frac{2}{a_0})(2re^{-\frac{2r}{a_0}} - \frac{2r^2}{a_0}e^{-\frac{2r}{a_0}})) \\
&= e\delta^3(\vec{r}) - \frac{e}{4\pi}(\frac{4}{a_0 r^2} - \frac{4}{a_0 r^2} - \frac{4}{a_0^2 r} + \frac{4}{a_0^2 r} + \frac{4}{a_0^3})e^{\frac{-2r}{a_0}} \\
&= \underbrace{\delta^3(\vec{r})}_{\text{pos. Punktladung im Ursprung (diskret)}} - \underbrace{\frac{e}{4a_0^3}e^{-\frac{2r}{a_0}}}_{\text{Negative } e^- \text{-Wolke (kontinuierlich)}}
\end{aligned}$$

Gesamtladung

$$\begin{aligned}
Q &= \int d^3\vec{r}\rho(\vec{r}) = \int d^3\vec{r}e\delta^3(\vec{r}) - \frac{e}{a_0^3\pi}\int d^3\vec{r}e^{-\frac{2r}{a_0}} \\
&= e - \frac{e}{a_0^3\pi}\underbrace{\int d\Omega}_{4\pi}\int_0^\infty drr^2e^{-\frac{2r}{a_0}} = e - \frac{4e}{a_0^3}\frac{2}{(\frac{2}{a_0})^3} = e - e = 0
\end{aligned}$$

Anmerkung:

$$\int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin\theta = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\cos\theta$$