ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Institut für Theoretische Physik

Übungen zur Vorlesung „Elektrodynamik“

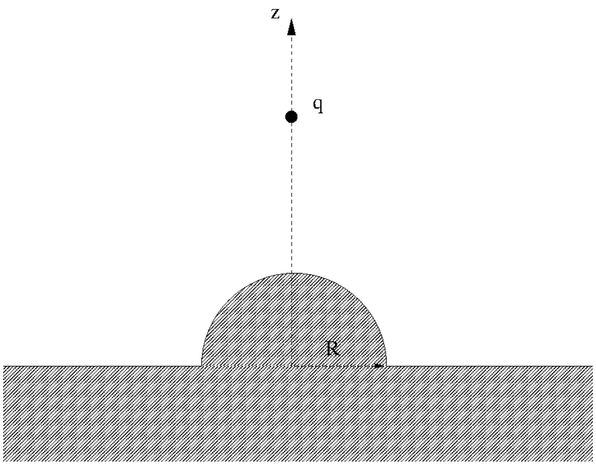
Prof. Dr. T. Gehrmann

Blatt 3 –Frühjahrssemester 2013
Abgabe: 12.03.2013
Besprechung: ETH 13.03.2013
UZH 14.03.2013

---

http://www.itp.phys.ethz.ch/education/lectures_fs13/Elektrodynamik

Aufgabe 1 Spiegelladungen I



Eine leitende (x, y)-Ebene besitze eine Ausbeulung in Form einer Halbkugel vom Radius R. Der Kugelmittelpunkt liege in der Ebene im Koordinatenursprung. Auf der Symmetrieachse (z-Achse) befinde sich im Abstand $d > R$ von der Ebene eine Punktladung q. Mit der Methode der elektrischen Spiegelladungen bestimme man das Potential $\phi(\vec{x})$ sowie die Kraft $\vec{F}$ auf die Ladung q.

(a) Um die Oberfläche der Halbkugel zur Äquipotentialfläche ($\phi \equiv 0$) zu machen, brauchen wir eine Spiegelladung q_1 auf der z-Achse im Abstand z_1 vom Ursprung. Man bestimme q_1 und z_1.

(b) Um die (x, y)-Ebene zur Äquipotentialfläche zu machen, benötigen wir zwei weitere Spiegelladungen q_2 und q_3. Man bestimme Größe und Lage dieser Ladungen.

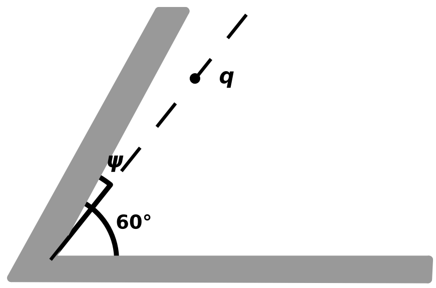
– bitte wenden –

(c) Mit den Werten für die Ladungen und deren Positionen bestimme man: Das elektrostatische Potential $\phi(\vec{x})$ für einen beliebigen Aufpunkt $\vec{x}$ oberhalb der leitenden Fläche, die Kraft $\vec{F}$ auf die Ladung q und ob die Kraft abstoßend oder anziehend ist.

Wie verhält das Potential in grossem Abstand von der Ladung q?

Aufgabe 2 Spiegelladungen II

An einem beliebigen Ort zwischen zwei geerdeten, leitenden Metallplatten, die einen Winkel von 60° zueinander haben, befindet sich eine Punktladung q.



(a) Berechnen Sie das elektrostatische Potential im Raum zwischen den Platten. Benutzen Sie hierzu die Methode der Spiegelladungen: Überlegen Sie sich anhand einer Skizze Anzahl, Größe, Vorzeichen und Lage der Spiegelladungen, und bestimmen Sie anschließend das Potential. Diskutieren Sie das Ergebnis qualitativ als Funktion des Winkels ψ .

(b) Bestimmen Sie die Kraft $\vec{F}$ auf die Ladung q nach Betrag und Richtung.

Aufgabe 3 Randwertproblem und Separationsansatz

Gegeben sei ein Würfel mit der Kantenlänge a. Die Seitenflächen befinden sich auf Potential Null bis auf die Deckfläche bei $z = a$ mit Potential $v(x, y)$ und die Seitenfläche bei $x = a$ mit Potential $u(y, z)$. Im einzelnen seien

$$v(x,y) = v_0 \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{a}y\right), \qquad u(y,z) = u_0 y(a-y)z(a-z).$$

Gesucht ist das Potential im Innern des Würfels, also die Lösung von $\Delta\phi = 0$ mit obigen Randbedingungen. Gehen Sie in folgenden Schritten vor:

(a) Betrachten Sie zunächst den Fall $v(x, y)$ wie oben und $u \equiv 0$. Machen Sie für ϕ den Ansatz $\phi(x, y, z) = \vartheta(x) \cdot \Lambda(y) \cdot \Omega(z)$, und leiten Sie daraus drei separate Differentialgleichungen von je einer Variablen her. Bestimmen Sie aus den 5 Randbedingungen der geerdeten Flächen die Form der möglichen Lösungen $\vartheta_n(x)$, $\Lambda_m(y)$ und $\Omega_{n,m}(z)$.

(b) Aufgrund der Linearität der Laplace-Gleichung ist die allgemeine Lösung von der Form

$$\phi(x, y, z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} C_{n,m} \cdot \vartheta_n(x) \cdot \Lambda_m(y) \cdot \Omega_{n,m}(z)\,,$$

mit Entwicklungskoeffizienten $C_{n,m}$, die Sie aus der Bedingung $\phi(x, y, a) = v(x, y)$ und einer Fourier-Analyse bestimmen können. Benutzen Sie hierzu

$$\int_0^\pi dx \sin(ax) \sin(bx) = \frac{\pi}{2}\delta_{ab} \qquad a, b \in \mathbf{N}$$

(c) Führen Sie eine analoge Rechnung wie in (a) und (b) durch, nun für den Fall $u(y, z)$ wie oben und $v \equiv 0$. Das Gesamtpotential ergibt sich aufgrund der Linearität der Laplace-Gleichung als Summe aus den beiden berechneten Potentialen.