ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Institut für Theoretische Physik

# Übungen zur Vorlesung „Elektrodynamik“

Prof. Dr. T. Gehrmann

Blatt 4 –Frühjahrssemester 2013
Abgabe: 19.03.2013
Besprechung: ETH 20.03.2013
UZH 21.03.2013

http://www.itp.phys.ethz.ch/education/lectures_fs13/Elektrodynamik

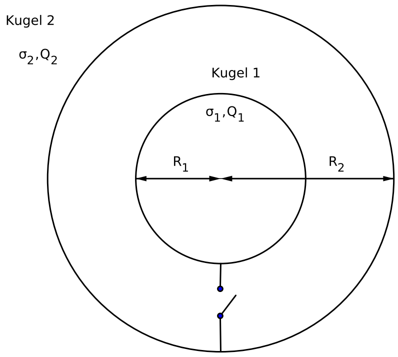
## Aufgabe 1 Kapazität

Eine Anordnung zweier Leiter $L_1$ und $L_2$ habe die Kapazitätskoeffizienten $C_{11}$, $C_{22}$, $C_{12}$ und $C_{21} = C_{12}$. Diese Anordnung soll als Kondensator benutzt werden: d.h. die Leiter werden mit einer Spannungsquelle verbunden und somit mit gleichen Ladungsmengen entgegengesetzen Vorzeichens aufgeladen. Die Differenz der Potentiale bezeichnen wir mit $V = U_1 - U_2$.

(a) Berechnen Sie die Kapazität $C$ der Anordnung. Stellen Sie auch $U_1$ und $U_2$ als Funktion der $C_{ij}$ und $V$ dar.

(b) Berechnen Sie die in der Anordnung gespeicherte Energie $W = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} U_i\, C_{ij}\, U_j$, und vergleichen Sie das Ergebnis mit der schon bekannten Formel $W = \frac{1}{2}\, C\, V^2$.

## Aufgabe 2 Cavendish Experiment




Das elektrostatische Potential im Inneren einer geladenen leitenden Kugel ist konstant, das elektrische Feld verschwindet. Dies ist eine einzigartige Eigenschaft des Coulombfeldes, die sich im Gaußschen Gesetz ausdrückt. Eine Abweichung vom Coulombgesetz führt auf ein endliches Feld im Innern der Kugel. Cavendish verifizierte 1772 das Coulombgesetz mit folgendem Nullexperiment: Er nahm zwei konzentrische Metallkugeln, verbunden durch einen elektrischen Kontakt, und lud die äußere mit statischer Ladung auf. Nach Entfernen des Kontaktes entlud und entfernte er die äußere Kugel, maß die Ladung auf der Innenkugel mittels eines Elektrometers und fand Null.

Man betrachte im folgenden das Potential (einer Punktladung $q$)

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}\,\mathrm{e}^{-\mu r},$$

– bitte wenden –

das im Grenzübergang $\mu \to 0$ in das $1/r$-Potential des Coulombgesetzes übergeht. Das Potential entspricht einem Yukawa-Potential, das für die elektromagnetische Wechselwirkung im Falle einer endlichen Photonmasse vorhergesagt wird.

(a) Berechnen Sie für dieses Potential die totale elektrostatische Energie des Systems für beliebige Flächenladungsdichten $\sigma_1, \sigma_2$. Die Gesamtenergie setzt sich aus den beiden Selbstenergien der einzelnen Kugeln und der Wechselwirkungsenergie zusammen:

$$\begin{aligned} E_{\text{ges}} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1,2} E_{ij}, \\ E_{ij} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int\limits_{\text{Kugel}\, i} \mathrm{d}^2 r \int\limits_{\text{Kugel}\, j} \mathrm{d}^2 r' \, \frac{\sigma_i \sigma_j}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \mathrm{e}^{-\mu|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen sind die Flächenladungsdichten $\sigma_i = Q_i/(4\pi R_i^2)$ auf jeder der Kugeln homogen.

(b) Bestimmen Sie die Ladung $Q_1$ der inneren Kugel. Dazu minimiere man die Gesamtenergie des Systems unter der Nebenbedingung, daß die Gesamtladung $Q$ erhalten bleibt: $\mathrm{d}E_{\text{ges}}/\mathrm{d}Q_1 = 0 \quad$ mit $\quad Q_2 = Q - Q_1$.

(c) Berechnen Sie den ersten nichtverschwindenden Term in der Entwicklung von $Q_1$ im Limes $\mu \to 0$.

(d) Anhand der experimentellen Angaben und mit dem Ergebnis aus (c) schätze man ab, mit welcher Präzision Cavendish eine Abweichung vom Coulombfeld in $\mu$ messen konnte. Man bestimme daraus eine obere Schranke für die Photonmasse $m = \mu h/(2\pi c)$.

Die Radien der Kugeln sind $R_1 = 15\,\text{cm}$ und $R_2 = 30\,\text{cm}$. Die Ladung auf der äußeren Kugel kann man aus der maximal möglichen Feldstärke, der Durchschlagsfeldstärke $E_{\max} = 10^5\,\text{V/m}$ bestimmen. Die gerade noch nachweisbare Ladung $Q_1$ auf der inneren Kugel ergibt sich aus der Ansprechspannung 100 V und der Kapazität 50 pF des Elektrometers.

### Aufgabe 3 Leitungsrohr

Ein sehr langes Leitungsrohr hat einen quadratischen Querschnitt mit Seitenlänge $D$ wie in der Figur. Weit von beiden Enden des Rohres befindet sich eine Punktladung in der Mitte des quadratischen Querschnitts.

a) Berechnen Sie das elektrische Potential an allen Punkten innerhalb des Rohres in Form einer unendlichen Reihe.

Hinweis: Verwenden Sie folgende Identität

$$\delta(x)\delta(y) = \left(\frac{2}{D}\right)^2 \sum_{m,m'=0}^{\infty} \cos\frac{(2m+1)\pi x}{D} \cos\frac{(2m'+1)\pi y}{D}.$$

b) Geben Sie den asymptotischen Ausdruck für dieses Potential für die Punkte weit von der Punktladung.

c) Skizzieren Sie einige elektrische Feldlinien in einer Region weit von der Punktladung.
(Tipp: Vermeiden Sie die Verwendung von Spiegelladungen.)