ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Institut für Theoretische Physik

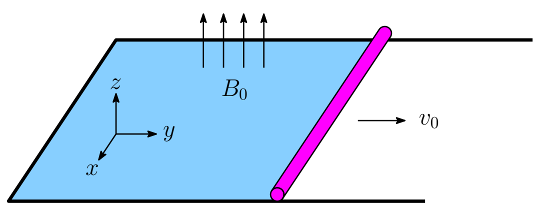
Übungen zur Vorlesung „Elektrodynamik“

Prof. Dr. T. Gehrmann

Blatt 8 –Frühjahrssemester 2013
Abgabe: 23.04.2013
Besprechung: ETH 24.04.2013
UZH 25.04.2013

`http://www.itp.phys.ethz.ch/education/fs13/ed`

Aufgabe 1 Gleitender Kupferstab



Ein Kupferstab gleite reibungslos auf einer Metallschiene wie in der Abbildung gezeigt. Die Anlage befinde sich in einem homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B_0\,\hat{\vec{e}}_z$. Zur Zeit $t = 0$ bewege sich der Stab mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_0 = v_0\,\hat{\vec{e}}_y$. Es seien l die Länge und A der Querschnitt des Stabes; die Leitfähigkeit von Kupfer ist $\sigma_0 = 6 \cdot 10^7\,\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$ und seine Dichte $\rho_m = 8{,}9 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m}^3$.

(a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Stabes zur Zeit t.

(b) Es sei $B_0 = 10^{-4}$ Tesla. Berechnen Sie die charakteristische Zeit, in welcher der Stab abgebremst wird.

(c) Zeigen Sie, dass die Abnahme der kinetischen Energie des Stabes pro Volumen- und Zeiteinheit gleich der Ohmschen Aufheizrate $P = UI$ (Jouleschen Wärmeleistung) pro Volumeneinheit ist.

– bitte wenden –

Aufgabe 2 Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld

Die Lagrangefunktion eines (nicht-relativistischen) Teilchens mit Ladung e im elektromagnetischen Feld ist gegeben durch

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^{\,2} + e\, \dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) - e\phi(\vec{x}, t),$$

wobei $\vec{x}$ der Ort und m die Masse des Teilchens ist.

(a) Bestimmen Sie den kanonischen Impuls $\vec{p}$. Wie hängt der kanonische Impuls mit dem kinetischen Impuls $m\dot{\vec{x}}$ zusammen? Bestimmen Sie mit Hilfe der Legendre-Transformation die Hamiltonfunktion:

$$H(\vec{x}, \vec{p}, t) = \vec{p} \cdot \dot{\vec{x}}(\vec{p}) - L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}(\vec{p}), t), \qquad p_i = \frac{\partial L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)}{\partial \dot{x}_i}.$$

(b) Verifizieren Sie aus $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ durch explizite Rechnung folgende Identität:

$$\sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right) \dot{x}_j = \left(\dot{\vec{x}} \times \vec{B} \right)_i .$$

(c) Leiten Sie aus den Hamiltonschen Gleichungen,

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad i = 1, 2, 3,$$

die Bewegungsgleichung eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld her:

$$m\ddot{\vec{x}} = e \left(\vec{E} + \dot{\vec{x}} \times \vec{B} \right) .$$

Für zeitabhängige Felder gilt

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x}, t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{x}, t)}{\partial t}.$$

Aufgabe 3 Energiesatz

An den Plattenkondensator aus der letzten Serie (Blatt 7, Aufgabe 2) wird eine Wechselspannung $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$ angelegt. Als Rand des Kondensators bezeichnen wir den Kreisring, welcher durch die Ränder beider Platten begrenzt wird. Betrachten Sie die Energiebilanz:

– bitte wenden –

(a) Berechnen Sie die im Feld zwischen den Kondensatorplatten gespeicherte Feldenergie als Funktion der Zeit t und im Zeitmittel.

(b) Bei welcher Frequenz ist im Mittel gleich viel Energie im $\vec{E}$-Feld und im $\vec{B}$-Feld gespeichert?

(c) Berechnen Sie den Energiefluss durch den Rand des Kondensators als Funktion der Zeit t und im Zeitmittel.

Aufgabe 4 Energietransport im Leitungsdraht

Zeigen Sie, wie der Poyntingsche Energiefluss $\vec{S} = \mu_0^{-1}\vec{E} \times \vec{B}$ in einem Draht der Länge l und dem Radius a, der von einem Gleichstrom I durchflossen wird, mit der Joulschen Wärmeleistung $P = UI$ pro Längeneinheit zusammenhängt.
Hinweis: zur Vereinfachung wird $\vec{E}$ im Draht als homogen angenommen; vergleichen Sie $|\vec{S}|$ und P nur für den Drahtquerschnitt.