Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Institut für Theoretische Physik

Übungen zur Vorlesung „Elektrodynamik“

Prof. Dr. T. Gehrmann

Blatt 0 –Frühjahrssemester 2013
Abgabe: keine Abgabe
Besprechung: ETH 27.02.2013
UZH 28.02.2013

Aufgabe 1 Der total antisymmetrische Tensor ϵ_{ijk}

Es seien $\vec{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ die Basisvektoren eines orthonormalen Koordinatensystems:

$$\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2, \qquad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}\,.$$

(δ_{ij} = Kronecker-Symbol: $\delta_{ij} = 1$ für $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$.)

Der total antisymmetrische Tensor dritter Stufe ϵ_{ijk} ist wie folgt definiert:

$$\epsilon_{ijk} \equiv \vec{e}_i \cdot (\vec{e}_j \times \vec{e}_k) = \begin{cases} +1 & \text{für } i,j,k = 1,2,3 \text{ und zyklische Vertauschungen,} \\ -1 & \text{für } i,j,k = 2,1,3 \text{ und zyklische Vertauschungen,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dieser Tensor ist z.B. für die Rechnung mit Vektorprodukten sehr nützlich. Das Vektorprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ lässt sich mit seiner Hilfe schreiben als

$$\vec{a} \times \vec{b} = \epsilon_{ijk}\, \vec{e}_i a_j b_k\ ,$$

wobei wir die Summenkonvention verwenden:
Über gleiche Indizes wird summiert.

(a) Es gilt (Beweis in der Übungsstunde):

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} &= \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} \\ &= \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{kl}\delta_{jm}\delta_{in} - \delta_{km}\delta_{jn}\delta_{il} - \delta_{kn}\delta_{jl}\delta_{im}\,. \end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie damit:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}\,, \tag{1}$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijn} = 2\,\delta_{kn}\,, \tag{2}$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6\,. \tag{3}$$

(c) Man zeige mit Hilfe von (1): $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

– bitte wenden –

Aufgabe 2 Der Nabla-Operator

Der Nabla-Operator $\vec{\nabla}$ in kartesischen Koordinaten ist $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$.

(a) Wie berechnet man die Normalenvektoren zu einer im Raum gegebenen Fläche $f(\vec{x}) = const.$? Wie lautet der nach außen zeigende Normalenvektor auf der Oberfläche des Ellipsoids $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1$?

(b) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\vec{a} \cdot \vec{\nabla}\varphi$ für $\varphi(\vec{x}) = x_1 x_2 x_3$ in Richtung $\vec{a} = (1, 1, 1)$.

(c) Berechnen Sie ($r = |\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$): $\quad \vec{\nabla} r\,, \quad \vec{\nabla}\frac{1}{r}\,, \quad \vec{\nabla} f(r)$

Aufgabe 3 Divergenz

Die Divergenz eines differenzierbaren Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{x})$ ist in kartesischen Koordinaten definiert als ($\partial_i \equiv \partial/\partial x_i$)

$$\operatorname{div}\vec{A} \;\equiv\; \vec{\nabla}\cdot\vec{A} \;\equiv\; \partial_i A_i \;=\; \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}\,.$$

Berechnen Sie ($r = |\vec{x}|$, $\vec{a} =$ konstanter Vektor)

(a) $\vec{\nabla}\cdot\vec{x}, \vec{\nabla}\cdot(r\vec{a}), \vec{\nabla}\cdot(r^n\vec{x})$.

(b) $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{x}\right)$, wobei $\vec{B}$ ein konstanter Vektor ist.

(c) $\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{x}}{r^3}\right)$ für $\vec{x} \neq \vec{0}$.

(d) $\vec{\nabla}\cdot\left(\hat{\vec{x}} f(r)\right)$, wobei $\hat{\vec{x}} = \vec{x}/r$.

Aufgabe 4 Rotation

Die Rotation eines differenzierbaren Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{x})$ ist in kartesischen Koordinaten definiert als ($i = 1, 2, 3$)

$$\left(\operatorname{rot}\vec{A}\right)_i \;\equiv\; \left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)_i \;=\; \epsilon_{ijk}\partial_j A_k\,.$$

Berechnen Sie

(a) $\vec{\nabla}\times(\vec{x} f(r))$,

(b) $\vec{\nabla}\times(\vec{B}\times\vec{x})$, wobei $\vec{B}$ ein konstanter Vektor ist,

(c) $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\phi$, wobei ϕ ein skalares Feld ist,

(d) $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)$.

Zeigen Sie ($\vec{A}$, $\vec{B}$ differenzierbare Vektorfelder)

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{A} \times \vec{B}\right) \;=\; \vec{A}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}\right) - \vec{B}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) + \left(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{A} - \left(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{B}\,.$$

Aufgabe 5 δ-Funktion

Die "δ-Funktion" $\delta(x - x_0)$ ist diejenige verallgemeinerte Funktion von x, die

(1) für alle $x \neq x_0$ den Wert Null hat und

(2) zusammen mit stetigen Funktionen unter einem ebenfalls verallgemeinerten Integral wirkt wie
$$\int_a^b \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0)$$
sofern $x_0 \in (a, b)$.

Es ist nicht nur zur besseren Veranschaulichung nützlich, sich eine approximative Realisierung der Definition der δ-Funktion klar zu machen. In vielen physikalischen Problemen stösst man tatsächlich auf solche Näherungen von δ-Funktionen.

Betrachten wir dann die glatten (d.h. hier beliebig oft differenzierbaren) Funktionen $\delta_n(x)$,

(a) $\delta_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{n}{1+n^2x^2}$,

(b) $\delta_n(x) = \frac{n}{\pi} (\frac{\sin nx}{nx})^2$,

(c) $\delta_n(x) = n\, e^{-\pi n^2 x^2}$.

Es gilt
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x) dx = 1 \quad , \forall n$$

Für hinreichen grosses n realisiert $\delta_n(x)$ näherungsweise die genannten definierenden Merkmale der δ-Funktion nicht nur anschaulich, sondern auch analytisch.
Überprüfen Sie damit, ob jeweils für $n \to \infty$ die Bedingung (1) erfüllt ist.