Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Institut für Theoretische Physik

Übungen zur Vorlesung „Elektrodynamik“

Prof. Dr. T. Gehrmann

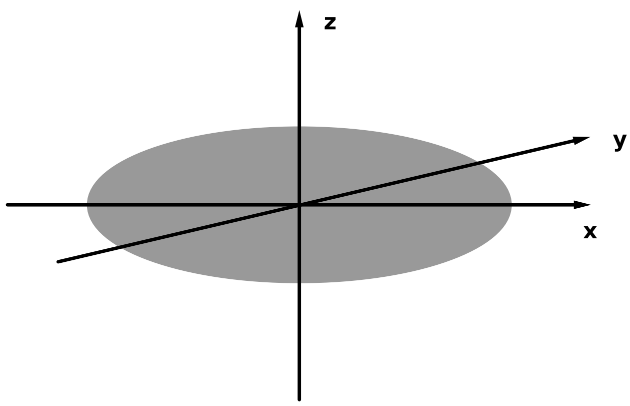
Blatt 2 –Frühjahrssemester 2013
Abgabe: 05.03.2013
Besprechung: ETH 06.03.2013
UZH 07.03.2013

---

http://www.itp.phys.ethz.ch/education/lectures_fs13/Elektrodynamik

Aufgabe 1 Geladene Kreisscheibe I

Eine dünne, gleichmäßig geladene Kreisscheibe mit Gesamtladung Q und Radius R befindet sich in der x-y-Ebene mit dem Zentrum im Ursprung. Dem Problem



angepasst sind Zylinderkoordinaten: $\vec{r} = (\varrho\,\cos\varphi, \varrho\,\sin\varphi, z)$ mit $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Die Ladungsdichte lässt sich schreiben als $\varrho_{el}(\varrho,\,\varphi,\,z) = \dfrac{Q}{\pi R^2}\,\delta(z)\,\theta(R-\varrho)$.

– bitte wenden –

(a) Berechnen Sie für zwei Ortsvektoren $\vec{r}$ und $\vec{r}\,'$ den Ausdruck $|\vec{r}-\vec{r}\,'| = \sqrt{(\vec{r}-\vec{r}\,')^2}$, und vereinfachen Sie ihn mit Hilfe der trigonometrischen Additionstheoreme.

(b) Leiten Sie ausgehend von $\phi(\varrho,\varphi,z) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int \mathrm{d}^3\vec{r}\,' \, \dfrac{\varrho_{el}(\varrho\,',\varphi\,',z\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ einen Ausdruck für das elektrische Potential in der Form eines zweifachen Integrals her. Zeigen Sie explizit: $\phi(\varrho,\varphi,z) = \phi(\varrho,z)$ [$\leftrightarrow$Rotationssymmetrie um die z-Achse].

(c) Berechnen Sie das Potential auf der z-Achse explizit, und entwickeln Sie das Ergebnis für kleine $R/|z|$ bis zur Ordnung $\mathcal{O}(R/|z|)$ einschließlich. Interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 2 Sphärische Multipolmomente eines Würfels

Positive und negative Punktladungen $\pm q$ sind auf den Ecken eines Würfels mit Kantenlänge a angeordnet. Ladungen auf benachbarten Ecken haben entgegengesetztes Vorzeichen. Der Koordinatenursprung ist im Zentrum des Würfels. Die Ladung bei $\left(+\frac{a}{2},+\frac{a}{2},+\frac{a}{2}\right)$ sei $+q$.

(a) Bestimmen Sie die Lage der Ladungen in kartesischen Koordinaten und in Kugelkoordinaten.

(b) Bestimmen Sie die Ladungsdichte in kartesischen Koordinaten. Bestimmen Sie anschließend die Ladungsdichte in Kugelkoordinaten. Verwenden Sie hierbei

$$\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0) = \frac{1}{r^2\sin\theta}\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)\delta(\varphi-\varphi_0)\,,$$

sowie $\sin\theta = \sin(\pi-\theta)$ und $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$.

(c) Berechnen Sie die sphärischen Dipol-, Quadrupol- und Oktupolmomente dieser Ladungsverteilung. Verwenden Sie hierbei

$$q_{lm} = \int \mathrm{d}^3\vec{r}\;\varrho_{el}(\vec{r})\,r^l\,Y^*_{lm}(\theta,\varphi) \quad \text{mit} \quad m = -l,-l+1,\ldots,+l.$$

Die benötigten Kugelflächenfunktionen lauten:

$$Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\;\sin\theta\;e^{i\varphi} \qquad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\;\cos\theta \qquad Y_{22} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\;\sin^2\theta\;e^{2i\varphi}$$

$$Y_{21} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\;\sin\theta\cos\theta\;e^{i\varphi} \quad Y_{20} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}\left(3\,\cos^2\theta - 1\right)$$

$$Y_{33} = -\frac{1}{8}\sqrt{\frac{35}{\pi}}\;\sin^3\theta\;e^{3i\varphi} \quad Y_{32} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{105}{2\pi}}\;\sin^2\theta\cos\theta\;e^{2i\varphi}$$

$$Y_{31} = -\frac{1}{8}\sqrt{\frac{21}{\pi}}\;\sin\theta\left(5\cos^2\theta - 1\right)e^{i\varphi} \quad Y_{30} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{7}{\pi}}\;\left(5\cos^3\theta - 3\cos\theta\right)$$

Weiterhin gilt: $Y_{l,-m} = (-1)^m \, Y^*_{l,m}$ und somit $q_{l,-m} = (-1)^m \, q^*_{l,m}$.
Siehe auch http://mathworld.wolfram.com/SphericalHarmonic.html

Aufgabe 3 Geladene Kreisscheibe II

Gegeben sei eine Kreisscheibe analog zu Aufgabe 1, jedoch mit der Ladungsdichte

$$\varrho_{el}(\varrho,\, \varphi,\, z) = \frac{Q}{\pi R^2} \, \delta(z) \, \theta(R - \varrho) \cdot \cos\varphi$$

(a) Berechnen Sie die kartesichen Komponenten des Dipolmoments $\vec{p} = \int \mathrm{d}^3\vec{r} \; \varrho_{el}(\vec{r}) \; \vec{r}$. Schreiben Sie hierzu die Komponenten des Ortsvektors wie in Aufgabe 1, und führen Sie die Integrationen in Zylinderkoordinaten aus.

(b) Berechnen Sie die sphärischen Dipolmomente $q_{1,1}$, $q_{1,0}$ und $q_{1,-1}$ (mittels Kugelkoordinaten), und verifizieren Sie die in der Vorlesung gegebenen Relationen zwischen p_x, p_y, p_z und den $q_{1,m}$.